

67

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

JEAN BASS

1^{re} THÈSE

LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION ET DE TRANSFERT EN MÉCANIQUE ALÉATOIRE
EXEMPLES MATHÉMATIQUES
APPLICATION A LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

LA THÉORIE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE (HEISENBERG)

Soutenues le 17 décembre 1948, devant la Commission d'Examen

Jury { MM. VILLAT Président.
 { L. DE BROGLIE Examineurs.
 { G. DARMOIS

1948

LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION ET DE TRANSFERT
EN MÉCANIQUE ALÉATOIRE
EXEMPLES MATHÉMATIQUES
APPLICATION A LA MÉCANIQUE QUANTIQUE



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SÉRIE A, N° 2239
N° D'ORDRE : 3110

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

JEAN BASS

1^{re} THÈSE

LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION ET DE TRANSFERT EN MÉCANIQUE ALÉATOIRE
EXEMPLES MATHÉMATIQUES
APPLICATION A LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

LA THÉORIE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE (HEISENBERG)

Soutenues le 17 décembre 1948, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. VILLAT	Président.
		L. DE BROGLIE	Examineurs.
		G. DARMOIS	

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. J. CABANNES

PROFESSEURS

L. BLARINGHEM T	Botanique.	BOULIGAND T	Application de l'analyse à la Géométrie.
G. JULIA T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	CHAUDRON T	Chimie appliquée.
A. DENJOY T	Théorie des fonctions et Topologie.	WYART T	Minéralogie.
L. LUTAUD T	Géographie physique et Géologie dynamique.	TEISSIER T	Zoologie.
E. DARMOIS T	Enseignement de Physique.	MANGENOT T	Biologie végétale.
Robert LÉVY T	Physiologie comparée.	P. AUGER T	Physique quantique et relativité.
Henri VILLAT T	Mécanique des fluides et applications.	MONNIER	Physiologie générale.
Ch. JACOB T	Géologie.	PIVETEAU	Géologie.
P. PASCAL T	Chimie générale.	ROCARD T	Physique.
M. FRÉCHET T	Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.	H. CARTAN	Calcul différentiel.
M ^{me} RABART-LUCAS T	Chimie organique.	SCHAEFFER T	Physiologie des fonctions.
FOCH T	Mécanique physique et expérimentale.	LAFFITTE	Chimie (P. C. B.).
PAUTHENIER T	Électrotechnique générale.	FAVARD	Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
DE BROGLIE T	Théories physiques.	COULOMB T	Physique du globe.
JOB T	Chimie générale.	M ^{lle} COUSIN	Biologie animale (P. C. B.).
PRENANT T	Anatomie et Histologie comparées.	CHRÉTIEN	Chimie (P. C. B.).
COMBES T	Physiologie végétale.	DRACH	Zoologie.
GARNIER T	Géométrie supérieure.	KASTLER	Physique.
PÉRÈS T	Mécanique rationnelle.	CHATELET T	Arithmétique et théorie des nombres.
HACKSPILL T	Chimie minérale.	EPHRUSSI T	Génétique.
LAUGIER T	Physiologie générale.	WURMSER T	Biologie physico-chimique.
TOUSSAINT T	Technique aéronautique.	BAUER T	Chimie-Physique.
M. CURIE T	Physique (P. C. B.).	RIVIÈRE	Géologie (P. C. B.).
G. RIBAUD T	Hautes températures.	GAUTHERET	Biologie végétale (P. C. B.).
CHAZY T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	LUCAS	Physique.
H GAULT T	Chimie appliquée.	Max MORAND	Physique.
CROZE T	Physique théorique et Physique céleste.	ARNULF	Optique appliquée.
DUPONT T	Théories chimiques.	A. THOMAS	Évolution des êtres organisés.
VALIRON T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	SOLEILLET	Physique.
BARRABÉ T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	FORTIER	Mécanique expérimentale des fluides.
VAVON T	Analyse et mesures chimiques.	DANJON T	Astronomie.
G. DARMOIS T	Mathématiques générales.	FROMAGEOT	Chimie biologique.
Jacques BOURCART	Géographie physique et Géologie dynamique.	LAPORTE	Physique générale et Radio-activité.
AUBEL T	Chimie biologique.	JANET	Mathématiques générales.
M ^{me} JOLIOT-CURIE T	Physique générale et Radio-activité.	PETIT T	Biologie maritime.
PLANTEFOL T	Botanique.	QUENEY T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
CABANNES T	Recherches physiques.	GALLIEN	Biologie animale (P. C. B.).
GRASSÉ T	Évolution des êtres organisés.	EICHORN	Biologie végétale (P. C. B.).
PRÉVOST	Chimie organique.	DE CUGNAC	Biologie végétale (P. C. B.).
		LAVAL	Physique (P. C. B.).
		M ^{lle} CAUCHOIS	Chimie-Physique.
		THELLIER	Physique du globe.
		AUDUBERT	Électrochimie.
		L'HÉRITIER	Génétique.

Secrétaire Ch. MONIER

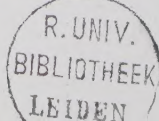


TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
INTRODUCTION	1

CHAPITRE PREMIER

LES HYPOTHÈSES FONDAMENTALES ET LA THÉORIE DU TRANSFERT

1. — Rappel des propriétés classiques des variables aléatoires	7
2. — Fonctions aléatoires	10
3. — La notion de point aléatoire. Notions générales sur les champs aléatoires de vitesses	14
4. — Variation d'une moyenne. Hypothèses fondamentales	16
5. — Équation fondamentale relative aux fonctions caractéristiques	19
6. — Cas où il existe une densité de probabilité	20
7. — La notion générale d'équation de transfert. Forme définitive de l'opérateur A	24
8. — Hydrodynamique du point aléatoire	26
9. — Thermodynamique du point aléatoire	29
10. — Extension des résultats précédents. Systèmes de n points aléatoires	30

CHAPITRE II

EXEMPLES MATHÉMATIQUES

11. — <i>Premier exemple.</i> — Fonctions aléatoires doublement dérivables	35
12. — <i>Deuxième exemple.</i> — Fonctions aléatoires à accroissements indépendants. Calcul de la fonction caractéristique $\varphi(\alpha, \beta, t)$	37
13. — Équation fonctionnelle vérifiée par $\varphi(\alpha, \beta, t)$. Équation de transfert	40
14. — <i>Troisième exemple.</i> — Remarques préliminaires sur les processus de Markoff	43
15. — Étude du point aléatoire admettant pour vitesse une fonction aléatoire $U(t)$ qui satisfait aux conditions de Kolmogoroff. Théorèmes fondamentaux	45
16. — Conséquences et remarques	50
17. — <i>Autre exemple</i> de fonction aléatoire	53
18. — <i>Autre exemple (suite).</i> Fonction caractéristique de $X(t)$ et $X'(t)$ et équations d'évolution	55

CHAPITRE III

**LA DÉFINITION DES VARIABLES ALÉATOIRES
A L'AIDE DES OPÉRATEURS DE L'ESPACE DE HILBERT**

19. — Les opérateurs linéaires de l'espace euclidien $\mathcal{R}$ à p dimensions	59
20. — Décomposition spectrale et fonction de répartition	61
21. — Valeurs moyennes. Fonction caractéristique	63
22. — Système de deux variables aléatoires dans $\mathcal{R}$	65
23. — Valeurs moyennes. Fonctions caractéristiques. Probabilités liées	67
24. — Cas particuliers	68
25. — Généralisation. Opérateurs linéaires de l'espace de Hilbert	69
26. — Valeurs propres, décompositions spectrales et fonctions caractéristiques ...	70
27. — Système de deux variables aléatoires dans l'espace de Hilbert	75
28. — Remarques et compléments	78

CHAPITRE IV

**LES VARIABLES ALÉATOIRES EN MÉCANIQUE QUANTIQUE
ET LES PSEUDO-LOIS DE PROBABILITÉ**

29. — Les opérateurs fondamentaux de la mécanique quantique	81
30. — Lois de probabilité fondamentales en mécanique quantique. Position. Impulsion	84
31. — Système de n variables aléatoires X_i ou U_i	86
32. — Moment cinétique	87
33. — Relations d'incertitude et extensions diverses	91
34. — Étude du système de variables aléatoires position-impulsion	95
35. — Étude de l'opérateur e^{A+B}	99
36. — Application au système position-impulsion. Pseudo-densité de probabilité de Wigner	101
37. — Autre démonstration	102
38. — Usages de la pseudo-densité de probabilité de Wigner. Nouvelles formules relatives aux valeurs moyennes	104
39. — Étude du système position-impulsion-énergie	108
40. — Remarque	112

CHAPITRE V

**LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION
ET LA THÉORIE DU TRANSFERT EN MÉCANIQUE QUANTIQUE**

41. — Variation de φ et de f en fonction du temps. Équation de structure et équation de Schrödinger	115
42. — Conséquences	119
43. — Équations hydrodynamiques associées au corpuscule quantique (fluide de probabilité)	119

44. — Propriétés du fluide de probabilité. Fluides irrotationnels et équation de Jacobi	121
45. — Extension des principes statistiques. Notions sur les mélanges	123
46. — Lois de probabilité dans un mélange	127
47. — Équation d'évolution de la fonction $S(x_k, y_k, t)$ et de la fonction caractéristique $\varphi(\alpha_k, \beta_k, t)$. Théorie du transfert	130
48. — Remarques sur l'hydrodynamique quantique	134
INDEX DES PRINCIPALES NOTATIONS	139
BIBLIOGRAPHIE	141

INTRODUCTION

Dans ses leçons sur la théorie des gaz, BOLTZMANN, reprenant des idées de MAXWELL, utilise une fonction qui, en chaque point x_1, x_2, x_3 de l'espace occupé par le gaz, présente les caractères d'une densité de probabilité par rapport aux composantes u_1, u_2, u_3 de la vitesse des molécules qui passent au voisinage de ce point. BOLTZMANN cherche ensuite à définir l'évolution de cette fonction au cours du temps. L'analyse des chocs entre molécules lui permet d'établir, moyennant certaines hypothèses, que le produit f de cette fonction par la densité du gaz (produit qui a les caractères d'une densité de probabilité par rapport à l'ensemble des x_i et des u_i) obéit à une *équation fonctionnelle* de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum u_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = A'f,$$

où A' est le symbole d'une certaine opération intégrro-différentielle (non linéaire) sur f .

La fonction f sert d'intermédiaire pour construire les expressions des grandeurs mécaniques ou physiques attachées au gaz (vitesse d'ensemble, tensions, conduction calorifique), qui se présentent sous la forme de *moyennes statistiques*. De l'équation fonctionnelle relative à f , on peut déduire les équations d'évolution dans le temps de ces grandeurs, ou plus précisément une famille d'équations dont chacune contient des moments d'un certain ordre n , et des moments d'ordre $n + 1$ de la vitesse. Les plus simples de ces équations ne sont autres que les équations hydrodynamiques ou thermodynamiques du gaz. Ces équations se condensent dans une unique *équation générale de transfert*, qui est la base de l'hydrodynamique suivant BOLTZMANN.

L'équation de Boltzmann n'est pas linéaire. Mais, comme l'a montré J. Yvon en 1935, elle résulte, par application du théorème des probabilités totales, et moyennant un certain nombre d'hypothèses sur la nature des interactions moléculaires, de l'équation de *Liouville*, bien connue en mécanique statistique.

La théorie cinétique, malgré certaines supériorités sur la mécanique rationnelle des fluides, n'arrive cependant pas à expliquer toutes les propriétés des fluides (par exemple la turbulence). Il semble qu'il y ait intérêt à reprendre les concepts de base de la mécanique statistique en remplaçant l'idée « statistique » élémentaire par l'idée « stochastique » ou « aléatoire ». On profite ainsi des possibilités multiples qu'offre le développement moderne du calcul des probabilités, et l'on dispose d'un schéma mécanique qui est à la fois compatible avec le continu de la mécanique des fluides et avec le discontinu des systèmes de molécules, ce qui élargit son champ d'applications. La fonction f devient la densité d'une loi de probabilité, et le concept mathématique fondamental est celui de *fonction aléatoire*, ou, en langage mécanique, de point aléatoire.

On sait qu'il est possible de représenter un *fluide* (ce mot étant employé dans la signification la plus générale) par un *point matériel aléatoire*, auquel correspond en particulier une densité de probabilité f (ou plus généralement une fonction de répartition) analogue à celle de BOLTZMANN, mais sans qu'il existe nécessairement une structure moléculaire sous-jacente (je rappelle plus loin comment on arrive à cette conclusion). La question qui se pose est de savoir si, à de tels schémas, on peut généraliser la théorie du transfert de BOLTZMANN.

Une réponse affirmative a été donnée par DEDEBANT, MOYAL et WEHRLÉ dans un cas particulier important, celui où il est possible de définir l'accélération aléatoire du point matériel aléatoire équivalent au fluide. Je me propose de reprendre la question d'un point de vue plus général, et de donner des exemples nouveaux. Je démontre que, pour aboutir à une équation de transfert, il suffit de partir d'une équation d'évolution de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum u_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = A'f,$$

où A' est un certain opérateur dont je précise les propriétés (ou d'une équation moins restrictive où figure une fonction caractéristique et non plus une densité de probabilité). De l'équation de transfert résultent alors des équations hydrodynamiques et thermodynamiques de la même forme générale que celles de BOLTZMANN. En particulier, l'équation de continuité classique exprime simplement l'existence d'une cinématique du point aléatoire.

Dans un second chapitre, j'applique la théorie générale à quelques types classiques de fonctions aléatoires. Je reprends d'abord, à cause de son importance, l'exemple de DEDEBANT, MOYAL et WEHRLÉ (*fonctions aléatoires doublement dérivables*). Le second exemple est celui des *processus de Markoff continus*, dont l'étude théorique a été faite par KOLMOGOROFF. Je montre que, parmi les résultats de KOLMOGOROFF, ceux qui entraînent la théorie du transfert ne font pas appel à l'équation fonctionnelle de Chapman, de sorte que les fonctions aléatoires pour lesquelles ils sont valables contiennent les processus de Markoff comme cas particuliers. J'étudie l'application de la théorie du transfert à ces fonctions aléatoires et aux fonctions aléatoires à accroissements orthogonaux ou indépendants. Je termine par un exemple qui contient comme cas particuliers certaines fonctions aléatoires doublement dérivables et certains processus de Markoff.

Les exemples précédents sont du domaine des mathématiques pures, et sont susceptibles d'une interprétation mécanique classique. Or il existe une mécanique d'apparence toute différente, dont il est intéressant de faire une étude spéciale. C'est la *mécanique ondulatoire*, ou *mécanique quantique*. C'est bien une mécanique *aléatoire* puisque les grandeurs qu'elle étudie dépendent de lois de probabilité. Mais elle est soumise à des règles très particulières.

Avant la mécanique quantique, l'idée hydrodynamique s'était déjà présentée en physique, en particulier en électromagnétisme, où elle était latente (tensions de Maxwell) et plus tard en relativité restreinte ou générale. La terminologie hydrodynamique apparaît dès le début de la mécanique ondulatoire. Mais le *fluide de probabilité* de L. DE BROGLIE (1930) procède plutôt de considérations de mécanique analytique des systèmes de points et les relations entre le « potentiel quantique » et les tensions

d'un fluide ne sont pas très nettes. Le calcul des tensions en mécanique ondulatoire se trouve chez PAULI (1932), mais se rattache à une idée de courant qui n'est qu'à moitié hydrodynamique. A la même époque, WIGNER construisait une sorte de densité de probabilité f quantique qui, comme je le montrerai, permet de réaliser une synthèse des conceptions hydrodynamiques et statistiques en mécanique quantique, mais il ne s'en servait qu'à des fins purement thermodynamiques. C'est tout récemment (1946-1947) que BORN et GREEN, reprenant (sans le savoir, semble-t-il) les idées de J. YVON en mécanique classique, ont appliqué d'une façon détaillée les méthodes de la mécanique statistique à l'hydrodynamique classique ou quantique.

Avant d'entamer le problème du transfert en mécanique quantique, j'ai cru utile d'exposer, sous une forme purement mathématique, et d'abord très élémentaire, les principes statistiques de la mécanique quantique, en employant systématiquement le langage du calcul des probabilités. J'ai ensuite rappelé quelques-uns des résultats fondamentaux de M. E. ARNOUS, qui justifient l'usage courant que je fais de la fonction caractéristique en mécanique quantique. J'utiliserai systématiquement, pour traiter des problèmes « non canoniques », les méthodes que M. ARNOUS a mises au point dans sa thèse, et qu'il a surtout appliquées aux problèmes classiques de la mécanique quantique. Comme la théorie du transfert dépend de la loi de probabilité du système position-vitesse, il faut discuter le problème de la corrélation (ou dépendance stochastique) entre deux variables aléatoires dans le formalisme quantique, et préciser comment on doit associer les espaces dans lesquels agissent les deux opérateurs attachés à ces deux variables pour que, dans l'espace résultant, la notion de corrélation ait un sens. Bien entendu, si l'on exige que ces opérateurs agissent dans le *même espace*, on retrouve le résultat connu d'après lequel ils doivent commuter. Les résultats que j'obtiens s'appliquent par exemple au système formé par l'opérateur de spin, et un opérateur fonction de la position et de l'impulsion, car ces opérateurs agissent dans deux espaces différents.

Il n'existe en mécanique quantique aucune fonction f qui puisse jouer le rôle de densité de probabilité pour le système position-impulsion, tout en étant compatible avec tous les axiomes du calcul des probabilités. Cette incompatibilité soulève plusieurs questions essentielles, qu'il est utile de débayer avant de poursuivre. Si $X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_n$ sont les coordonnées et les composantes de l'impulsion d'un corpuscule quantique (cartésien) à n dimensions, la mécanique quantique fournit les 2^n lois de probabilité de tous les systèmes de n variables aléatoires d'indices différents prélevées parmi les 2^n variables $X_1, \dots, U_n$. Elle fournit aussi les lois de probabilité de toutes les variables aléatoires représentées par des combinaisons fonctionnelles self adjointes des opérateurs position et impulsion. Quelles relations existe-t-il entre toutes ces lois ?

Je montre d'abord que, s'il existe une *relation fonctionnelle* entre des opérateurs, il n'existe pas en général de relation fonctionnelle de même forme entre les *variables aléatoires* correspondantes. La combinaison fonctionnelle d'opérateurs engendre une variable aléatoire stochastiquement distincte (je ne dis pas indépendante) des composantes. Il reste alors un problème qui ne se pose *peut-être* pas du point de vue physique, mais qui conserve une signification mathématique précise, et qu'il faut énoncer nettement : les 2^n lois de probabilité relatives à tous les systèmes de n variables aléatoires convenablement choisies parmi les X_i, U_i sont-elles compatibles au sens du calcul des probabilités ? Existe-t-il, indépendamment des principes de la mécanique quantique,

une loi de probabilité pour l'ensemble des X_i, U_i qui contienne les 2^n lois en question telles que les fournit la mécanique quantique ? Cette question me semble importante, et j'en donne aussi un énoncé concret, qui malheureusement n'apporte pas la réponse (sauf dans le cas du corpuscule à une dimension, où elle est évidente et affirmative). Il va sans dire que l'existence mathématique de cette loi de probabilité n'aurait rien d'incompatible avec les relations d'incertitude.

Est-il possible, malgré toutes ces difficultés, d'adapter la théorie du transfert à la mécanique quantique ? Oui, car cette théorie ne fait pas en réalité appel à *tous* les axiomes du calcul des probabilités. Il est possible de construire une fonction f qui soit compatible avec les principes de la mécanique quantique, et aussi avec les axiomes du calcul des probabilités, sauf un, celui qui confère aux probabilités l'essentiel de leur signification physique, et qui affirme que les probabilités sont des grandeurs *positives*. On rétablit formellement la notion de corrélation à condition d'admettre des « densités de probabilité » f non nécessairement positives. On doit les considérer comme des intermédiaires permettant de calculer :

1° Certaines grandeurs physiques qui jouent formellement (ou véritablement) le rôle de moyennes ;

2° Certaines véritables probabilités positives, ayant une signification statistique intrinsèque.

Pour éviter toute confusion, je dirai que les grandeurs telles que f sont des *pseudo-densités de probabilité*. Naturellement, certains théorèmes du calcul des probabilités disparaissent, en particulier l'inégalité de Schwarz (elle est remplacée dans une certaine mesure par les relations d'incertitude ou des relations analogues).

La structure de la fonction f résulte presque intuitivement de considérations de symétrie, d'ailleurs dangereuses, et il semble que ce soit de cette façon que WIGNER l'ait découverte. Mais il faut la *démontrer*, c'est-à-dire la déduire rationnellement des principes de la mécanique quantique, et prouver son unicité. C'est ce que je fais à la fin du chapitre IV, par deux méthodes différentes. J'applique ensuite la seconde méthode à un problème où figure à la fois la position, l'impulsion et l'énergie, et je montre que, dans ce cas, les raisonnements par symétrie conduisent à un résultat inexact. La formule exacte n'a rien d'intuitif.

Après ces préliminaires indispensables, il est enfin possible de développer la théorie du transfert en mécanique quantique. Cela exige d'introduire l'équation d'évolution dans le temps de la fonction d'onde ψ , c'est-à-dire l'équation de Schrödinger. Mais il est intéressant de procéder à l'envers. Je pars des deux hypothèses suivantes :

1° (Hypothèse fondamentale de la mécanique quantique). La valeur moyenne de la grandeur associée à l'opérateur C dans l'état ψ est le produit scalaire de ψ par son transformé $C\psi$;

2° La théorie du transfert, exposée au chapitre premier, s'applique aux pseudo-densités de probabilité.

Je vérifie alors la compatibilité de ces deux hypothèses, je montre que la seule équation d'évolution possible pour ψ est l'équation de Schrödinger, et j'établis la forme quantique de l'équation d'évolution de la pseudo-densité de probabilité f .

une différence importante entre les méthodes qui sont exposées dans le présent travail et celles de certaines théories modernes, comme la turbulence. Dans ces dernières, où les concepts statistiques interviennent plutôt par des moments que par des lois de probabilité, il s'agit des moments relatifs à des composantes de la vitesse prises *en deux points ou à deux instants distincts*. C'est bien faire appel à certaines propriétés essentielles des fonctions aléatoires, celles justement qui les distinguent de simples lois de probabilités variables.

LES HYPOTHÈSES FONDAMENTALES ET LA THÉORIE DU TRANSFERT

1. — Rappel des propriétés classiques des variables aléatoires [1-36] ⁽¹⁾.

On appelle *variable aléatoire* une grandeur X qui peut prendre plusieurs valeurs $x_1, x_2, \dots$, appartenant à un ensemble donné $\mathcal{E}$. Une mesure de cette grandeur, ou épreuve statistique, a pour résultat un certain nombre de l'ensemble $\mathcal{E}$, mais il est impossible de prévoir quel sera ce nombre. On sait seulement qu'il appartient à $\mathcal{E}$ et que, après un grand nombre d'épreuves, chacune des valeurs apparaît avec une fréquence stable qui est l'approximation statistique de sa *probabilité*.

On appelle *fonction de répartition* de X la probabilité $F(x)$ pour que X soit inférieur à un nombre donné x . $F(x)$ est une fonction non décroissante, telle que :

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$$

Si $F(x)$ admet une dérivée $f(x)$, cette dérivée s'appelle *densité de probabilité* de X . C'est une fonction *non négative* et *normée*, et $\int f(x) dx$ est la probabilité pour que $x \leq X < x + dx$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

En outre,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds.$$

La valeur moyenne d'une fonction $G(X)$ est l'intégrale de Stieltjes :

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) dF(x).$$

La valeur moyenne de la fonction :

$$G(X) = e^{ix}, \quad x \text{ réel},$$

(1) Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

est la *fonction caractéristique* de X . C'est l'intégrale de Fourier-Stieltjes :

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} dF(x).$$

Si X possède une densité de probabilité $f(x)$, $\varphi(\alpha)$ en est la transformée de Fourier, et inversement,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{-i\alpha x} \varphi(\alpha) d\alpha.$$

La fonction caractéristique jouit des propriétés suivantes :

$$1^\circ \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(-\alpha) = \varphi^*(\alpha),$$

la notation φ^* désignant l'*imaginaire conjugué* de φ ;

2° C'est une fonction définie-positive. Cela veut dire que, pour tout ensemble de nombres complexes ξ_p , on a :

$$\sum_{p, q} \varphi(\xi_p - \xi_q) \xi_p \xi_q^* \geq 0.$$

Réciproquement, toute fonction qui jouit des propriétés (1°) et (2°) est une fonction caractéristique. Les propriétés (1°) sont valables pour toutes les transformées de Fourier-Stieltjes d'une fonction $F(x)$ bornée, dont la variation totale de $-\infty$ à $+\infty$ soit égale à 1, même si cette fonction n'est pas monotone. Les propriétés (2°) traduisent la monotonie de $F(x)$, c'est-à-dire le caractère positif des probabilités.

La moyenne de X^n s'appelle *moment* d'ordre n de X . L'*écart type* de X est la racine carrée de :

$$\overline{(X - \bar{X})^2}.$$

Soient maintenant X et Y deux *variables aléatoires*. La probabilité $F(x, y)$ pour que *simultanément* $X < x$, $Y < y$, s'appelle *fonction de répartition du couple* X, Y . Dans certains cas, on peut définir une *densité de probabilité* $f(x, y)$. $f(x, y) dx dy$ est la probabilité pour que :

$$x \leq X < x + dx, \quad y \leq Y < y + dy.$$

$f(x, y)$ est une fonction non négative, dont l'intégrale étendue à tout le plan a la valeur 1.

D'après le *théorème des probabilités composées*, la probabilité $P(X, Y)$ d'un système de valeurs de X, Y est le produit de la probabilité $P(X)$ de X , par la probabilité de Y , une fois connue la valeur de X . Cette probabilité $P(Y|X)$ s'appelle une *probabilité liée* (ou conditionnelle).

Si par exemple il existe une densité de probabilité pour X, Y , la densité de probabilité de X est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy,$$

et la densité de probabilité liée de Y pour $X = x$ est :

$$\frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}$$

La fonction caractéristique du système de variables aléatoires X, Y est la fonction complexe :

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int_{\mathfrak{P}} e^{i(\alpha x + \beta y)} dF, \quad \alpha, \beta \text{ réels}$$

l'intégrale étant étendue à tout le plan $\mathfrak{P}$.

La valeur moyenne d'une fonction $G(X, Y)$ est l'intégrale :

$$\overline{G} = \int_{\mathfrak{P}} G(x, y) dF.$$

Les quantités $\overline{X^n Y^p}$ s'appellent *moments* du système de variables aléatoires X, Y .
L'inégalité de Schwarz affirme que :

$$(\overline{XY})^2 \leq \overline{X^2} \cdot \overline{Y^2}.$$

Pour la démontrer, on considère la forme linéaire

$$\lambda X + \mu Y,$$

où λ et μ sont deux paramètres réels. Son carré est positif, donc aussi la moyenne de son carré :

$$\lambda^2 \overline{X^2} + 2\lambda\mu \overline{XY} + \mu^2 \overline{Y^2} \geq 0.$$

Son discriminant est donc négatif, et c'est l'inégalité cherchée. Elle ne peut dégénérer en égalité que si Y est lié à X par une *relation fonctionnelle linéaire*.

Si Y n'est pas fonction de X , on dit qu'il existe entre les variables aléatoires X et Y une *dépendance stochastique* ou *corrélation*. X et Y sont des variables aléatoires *indépendantes* si la probabilité liée de Y pour $X = x$ ne dépend pas de x , c'est-à-dire si la fonction de répartition du couple X, Y est le produit des fonctions de répartition individuelles de X et de Y .

Posons : $X = \overline{X} + X', Y = \overline{Y} + Y'$. La quantité :

$$r = \frac{\overline{X'Y'}}{\sqrt{\overline{X'^2}} \sqrt{\overline{Y'^2}}}$$

s'appelle coefficient de corrélation entre X et Y . On voit que $|r| \leq 1$.

Toutes ces définitions et propriétés s'étendent à plus de deux variables aléatoires.

Notons que, si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont les composantes d'un *vecteur aléatoire* à n dimensions, les moyennes du second ordre $\overline{X_i X_j}$ sont les composantes d'un *tenseur*, associé

à la *forme bilinéaire* invariante

$$\sum \lambda_i \mu_j \overline{X_i X_j} = \overline{\left(\sum \lambda_i X_i \right) \left(\sum \mu_i X_i \right)}.$$

La *forme quadratique*

$$\sum \lambda_i \lambda_j \overline{X_i X_j} = \overline{\left(\sum \lambda_i X_i \right)^2},$$

ne peut être négative.

Remarques. — 1° Les propriétés des probabilités se séparent en deux groupes :

a) Ce sont des grandeurs *normées* (théorème des probabilités totales);

b) Ce sont des grandeurs *positives* (nature physique de probabilités), ou, ce qui revient au même, les fonctions de répartition sont non décroissantes.

Il est presque toujours facile de distinguer les conséquences particulières de ces deux groupes de propriétés. C'est ainsi que les quantités $\overline{X_i X_j}$ forment toujours un tenseur, si les X_i sont les composantes d'un vecteur. Mais, si l'on associe, sans changer les notations, ce tenseur à des fonctions normées, jouant le rôle de probabilités, sans toutefois être nécessairement positives, la forme quadratique

$$\sum \lambda_i \lambda_j \overline{X_i X_j}$$

n'est plus nécessairement positive.

2° On peut définir des *variables aléatoires complexes*. Toutes les propriétés relatives aux *moyennes* s'étendent aisément, la moyenne de X étant, par définition, le nombre complexe qui a pour partie réelle la moyenne de la partie réelle de X , et pour partie imaginaire la moyenne de la partie imaginaire de X . Il faut seulement noter que $\overline{X^2}$ n'est plus nécessairement positif, et qu'il faut introduire $|X|^2 = \overline{X X^*}$, X^* étant l'imaginaire conjugué de X . Il faut de même remplacer les formes quadratiques par des formes hermitiennes. Par exemple :

$$\sum \lambda_i \lambda_j^* \overline{X_i X_j^*} = \overline{\left| \sum \lambda_i X_i \right|^2} \text{ est positif.}$$

2. — Fonctions aléatoires [4-42-43].

Une fonction aléatoire $X(t)$ est une variable aléatoire dépendant d'un paramètre t (le temps). Une *fonction* aléatoire est donc équivalente à l'*ensemble* des variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, t_1, t_2, \dots$, étant l'ensemble des valeurs de t sur lequel elle est définie. Nous supposons que cet ensemble est continu.

Pour définir une fonction aléatoire, on peut faire sur l'ensemble de toutes les variables aléatoires $X(t)$ une épreuve globale unique. Le résultat est une « épreuve sur la fonction aléatoire », c'est-à-dire une fonction certaine. $X(t)$ est équivalente à l'ensemble de toutes ces fonctions certaines.

On peut aussi se fixer la loi de probabilité de $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ pour un nombre n arbitraire d'instants. C'est une fonction de n , de $t_1, t_2, \dots, t_n$, et des n valeurs

courantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$. Nous supposons que $X(t)$ peut être complexe, et désignerons par $X^*(t)$ la grandeur complexe conjuguée.

On appelle *covariance* d'une fonction aléatoire la moyenne du produit $X(t_1) X^*(t_2)$:

$$\Gamma(t_1, t_2) = \overline{X(t_1) X^*(t_2)}.$$

On voit que $\Gamma(t_2, t_1) = \Gamma^*(t_1, t_2)$ (symétrie hermitienne de la covariance). On démontre le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\Gamma(t_1, t_2)$ soit la covariance d'une fonction aléatoire est que, pour tout ensemble de nombres complexes ξ_p , on ait :

$$\sum_{p, q} \Gamma(\xi_p, \xi_q) \xi_p \xi_q^* \geq 0.$$

On dit que $X(t)$ est une fonction aléatoire *stationnaire de second ordre* si sa covariance $\Gamma(t_1, t_2)$ est finie et ne dépend que de la différence $t_2 - t_1 = \tau$. $\overline{|X|^2}$ est alors une constante finie.

Si l'on prend $\overline{|X|^2} = 1$, on voit que la covariance d'une fonction aléatoire stationnaire de second ordre a les mêmes propriétés qu'une fonction caractéristique. Il existe donc une fonction de répartition $\mathcal{F}(\omega)$ (*fonction spectrale*) telle que, d'une façon générale,

$$\Gamma(\tau) = \overline{|X|^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} d\mathcal{F}(\omega).$$

On dit que $X(t)$ est *complètement stationnaire* (ou *stationnaire au sens strict*) si la loi de probabilité de $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ ne dépend que des différences $t_i - t_j$, et reste par suite indifférente à un déplacement de l'origine du temps.

Une fonction aléatoire $X(t)$ *tend en moyenne quadratique vers une limite* X_0 si, lorsque $t \rightarrow t_0$,

$$\overline{|X(t) - X_0|^2} \rightarrow 0.$$

Une fonction aléatoire est *continue en moyenne quadratique* au point t si $X(t + \tau)$ tend en moyenne quadratique vers $X(t)$ lorsque $\tau \rightarrow 0$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que la covariance $\Gamma(t, t')$ soit continue pour $t' = t$.

Soit $X(t)$ une fonction aléatoire réelle continue en moyenne quadratique, admettant des moments d'ordre 1 et 2 finis et dérivables par rapport à t .

$$\overline{X^2(t)} = \Gamma(t, t + \tau),$$

tend vers 0 avec τ . De même, si $r(t, t + \tau)$ est le coefficient de corrélation entre $X(t)$ et $X(t + \tau)$,

$$1 - r(t, t + \tau),$$

tend vers 0 avec τ . On peut démontrer que, si $1 - r$ possède un ordre infinitésimal μ par rapport à τ , μ est au plus égal à 2.

Introduisons en effet les coefficients de corrélation r_{23}, r_{31}, r_{12} entre les variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), X(t_3)$ prises deux à deux. La forme quadratique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2r_{23}x_2x_3 - 2r_{31}x_3x_1 - 2r_{12}x_1x_2,$$

est positive. Par suite, r_{23}, r_{31}, r_{12} sont nécessairement les cosinus des faces d'un trièdre. Si les instants t_1, t_2, t_3 sont infiniment voisins, les quantités $\sqrt{1 - r_{23}}, \sqrt{1 - r_{31}}, \sqrt{1 - r_{12}}$ ont pour parties principales les côtés d'un triangle. Or ces parties principales sont proportionnelles à $(t_3 - t_2)^{\frac{\mu}{2}}, (t_3 - t_1)^{\frac{\mu}{2}}, (t_2 - t_1)^{\frac{\mu}{2}}$, en supposant $t_1 < t_2 < t_3$. Posons $t_2 - t_1 = a, t_3 - t_2 = b$, et appliquons l'inégalité triangulaire :

$$(a + b)^2 \leq a^2 + b^2, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Il est maintenant facile de démontrer que, pour que cette égalité soit satisfaite, il est nécessaire que $\mu \leq 2$. Si $\mu = 2$, on se trouve dans le cas limite où l'inégalité se transforme en une égalité.

Soit maintenant $X(t)$ une fonction aléatoire réelle ou complexe, continue en moyenne quadratique.

Si $\frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau}$ tend vers une limite en moyenne quadratique $U(t)$ lorsque $\tau \rightarrow 0$, on dit que $U(t)$ est *dérivable en moyenne quadratique*. $U(t)$ est la dérivée. Cela veut dire que :

$$\left| \frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} - U(t) \right|^2 \rightarrow 0.$$

Si $X(t)$ est dérivable et réelle, $1 - r(t, t + \tau)$ est d'ordre $\mu = 2$ par rapport à τ .

La condition nécessaire et suffisante pour que $X(t)$ soit dérivable en moyenne quadratique est que la dérivée seconde généralisée de Γ existe pour $t_2 = t_1$. La covariance de la dérivée est cette dérivée seconde généralisée (1).

Considérons, par exemple, la fonction $\Gamma(\tau) = e^{-|\tau|}$. La formule :

$$e^{-|\tau|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} e^{ix\tau} dx,$$

montre que $e^{-|\tau|}$, inverse de Fourier de la densité de probabilité de la loi de Cauchy, est une covariance. Si la fonction aléatoire $X(t)$ admet $e^{-|\tau|}$ pour covariance, elle est continue en moyenne quadratique et stationnaire de second ordre, mais elle n'est pas

(1) On appelle, avec LOÈVE, dérivée seconde généralisée de Γ la limite de

$$\frac{1}{hk} [\Gamma(t_1 + h, t_2 + k) - \Gamma(t_1 + h, t_2) - \Gamma(t_1, t_2 + k) + \Gamma(t_1, t_2)]$$

quand h et k tendent vers zéro.

dérivable en moyenne quadratique, parce que :

$$\frac{1}{hk} [e^{-(k-h)} - e^{-h} - e^{-k} + 1],$$

n'a pas de limite lorsque h et k tendent vers 0 ($k < h$).

Cos τ est la covariance d'une fonction aléatoire indéfiniment dérivable.

On dit que $X(t)$ est *intégrable en moyenne quadratique* de a à b si les sommes de Riemann classiques, qui sont ici aléatoires, admettent une limite commune en moyenne quadratique. Cette limite est l'intégrale aléatoire $\int_a^b X(t) dt$. $X(t)$ est la dérivée en moyenne quadratique de $\int_a^t X(s) ds$.

Parmi les classes de fonctions aléatoires importantes, il faut encore citer :

1° *Les fonctions aléatoires orthogonales à leurs accroissements :*

Si $\tau < 0$, $X(t + \tau) - X(t)$ est « non corrélé » avec $X(t)$ [Cas particulier : $X(t + \tau) - X(t)$ est indépendant de $X(t)$].

Ces fonctions sont reliées aux fonctions aléatoires stationnaires de second ordre par le théorème suivant :

Si $X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire de second ordre continue en moyenne quadratique, c'est la transformée de Fourier-Stieltjes (en moyenne quadratique) d'une fonction aléatoire $\xi(\omega)$ à accroissements orthogonaux :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} d\xi(\omega).$$

La fonction spectrale de $X(t)$ est alors définie par la relation

$$d\mathcal{F}(\omega) = \overline{d\xi(\omega)}^2.$$

2° *Les processus de Markoff continus* (1).

Ce sont des fonctions aléatoires telles que, si $t_1, t_2, \dots, t_n$ sont rangés par ordre croissant, la loi de probabilité liée de $X(t_n)$, une fois connues les valeurs de $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_{n-1})$ se réduise à la loi de probabilité liée de $X(t_n)$ lorsqu'on connaît seulement $X(t_{n-1})$. Cette loi définit la *probabilité de passage* de $X(t_{n-1})$ à $X(t_n)$. On démontre facilement, en combinant le théorème des probabilités totales et le théorème des probabilités composées, que cette probabilité de passage satisfait à une équation fonctionnelle qui, lorsqu'il existe une densité de probabilité de passage $p(x_{n-1}, x_n, t_{n-1}, t_n)$, s'écrit :

$$p(x_{n-1}, x_n, t_{n-1}, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{n-1}, s, t_{n-1}, t) p(s, x_n, t, t_n) ds, \quad t_{n-1} < t < t_n.$$

(Équation de Chapman-Kolmogoroff.)

Les fonctions aléatoires à accroissements *indépendants* sont des cas particuliers de processus de Markoff.

(1) La dénomination de « processus de Markoff » a été systématiquement employée par P. LÉVY [42]. Elle correspond, en « continu », aux chaînes simples de Markoff discontinues.

3. — La notion de point aléatoire. Notions générales sur les champs aléatoires de vitesses [5].

La dynamique classique d'un point matériel fait intervenir les grandeurs suivantes :

Un scalaire m , appelé *masse*, et indépendant du temps.

Un vecteur $X(t)$ fonction du temps, fixant la *position* du point.

Un vecteur $U(t)$ fonction du temps, fixant la *vitesse* du point, et se déduisant de la position par des opérations de passage à la limite.

L'hypothèse fondamentale de la mécanique est que le vecteur $U(t)$ est lui-même dérivable, et que sa dérivée, appelée *accélération*, est le quotient par m d'un vecteur extérieur au point, appelé *force*.

En mécanique des fluides, on considère des systèmes formés d'une infinité de « particules » assimilables à des points matériels qui seraient soumis à des interactions d'un type spécial. L'équilibre de la masse fluide intérieure à une surface S donnée est assuré par les forces extérieures et les forces d'inertie, qui agissent en chaque point du volume, et par les forces de tension appliquées à la surface S . Pour que l'équilibre soit assuré, il faut que la résultante des forces de tension appliquées à S soit de la forme :

$$\iint_S \sum_j T_{ij} \lambda_j dS,$$

où λ_j est le vecteur unitaire normal à S et T_{ij} un tenseur, appelé *tenseur des tensions*.

Ces forces peuvent, en effet, se remplacer alors par des forces appliquées en chaque point du fluide, et dont la résultante s'écrit :

$$\iiint_V \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV.$$

On démontre à l'aide du théorème des moments cinétiques que le tenseur T_{ij} est symétrique.

La mécanique rationnelle envisage aussi des systèmes formés d'une infinité de points matériels, mais sans interactions. Ces systèmes sont assimilables à des fluides sans tensions. On les rencontre en groupant convenablement les solutions de l'équation de Jacobi.

Un cas intermédiaire d'une grande importance est celui des systèmes formés d'un nombre très grand, mais fini, de points matériels isolés.

La *mécanique aléatoire* a pour objet l'étude des points matériels dont les éléments caractéristiques sont des variables aléatoires : la masse est une grandeur aléatoire, la position et la vitesse sont des fonctions aléatoires du temps.

Sous cette forme, la mécanique aléatoire est une cinématique. Elle ne devient une dynamique que moyennant certaines hypothèses, que nous étudierons. *La vitesse*

sera considérée dans la suite comme la dérivée en moyenne quadratique de la position, mais nous ne supposons pas en général que la vitesse soit elle-même stochastiquement dérivable. *Il n'y a pas d'accélération aléatoire*. Il existe seulement certaines *accélérations moyennes*.

La notion de point aléatoire est beaucoup plus riche que celle de point matériel en mécanique classique. Il est facile de se rendre compte par un raisonnement sommaire qu'elle *contient la mécanique des fluides*. Prenons, pour simplifier, une masse non aléatoire, égale à l'unité. Considérons, à un instant t fixé, la loi de probabilité liée du vecteur $U(t)$, c'est-à-dire des composantes de $U(t)$, pour une position $X(t)$ choisie. Cette loi dépend de 4 paramètres : le temps et les trois coordonnées x_1, x_2, x_3 fixées. C'est un champ de lois de probabilité dans l'espace. Elle définit, à l'instant t , le *champ aléatoire de vitesses* associé au point aléatoire. Elle ne suffit pas, à elle toute seule, à définir complètement ce champ. Elle contient cependant un champ de vitesses moyen qui possède toutes les propriétés des champs de vitesses de la mécanique des fluides classique. En outre, on peut prendre comme masse de fluide contenue dans un volume V la probabilité totale dans V du vecteur $X(t)$. Ces considérations élémentaires permettent donc déjà d'associer au point aléatoire une densité (ou une masse fluide) et un champ de vitesses.

Pour énoncer une réciproque, il est nécessaire de partir d'un *fluide turbulent*, c'est-à-dire d'un fluide dont, en chaque point, la vitesse puisse être considérée comme aléatoire à cause de son caractère d'agitation irrégulière. En un point, la statistique des vitesses fournit la loi de probabilité du champ de vitesses. A partir de cette loi de probabilité, on est d'abord conduit à considérer la vitesse comme une fonction aléatoire du temps et du point. C'est le champ de vitesses aléatoire. Mais on peut aussi traiter cette loi comme une loi de probabilité liée en un point choisi, la loi de probabilité relative à la position de ce point ayant pour densité la densité du fluide, à un facteur près. Le théorème des probabilités composées permet de grouper ces deux lois en une loi unique, où la vitesse et la position jouent un rôle symétrique. D'où l'idée d'associer au fluide un point aléatoire, la loi de probabilité précédente étant la loi de probabilité, à un instant donné, des 6 composantes de position et de vitesse de ce point.

Ainsi, par le simple jeu du théorème des probabilités composées, on voit qu'on *peut associer à un point matériel aléatoire un fluide*, et que, *réciproquement, on peut associer à un fluide, sinon un point aléatoire, du moins la loi de probabilité à un instant donné de la position et de la vitesse d'un point aléatoire*. Si l'on élargit suffisamment la définition classique d'un fluide, on est conduit à établir une correspondance sans restrictions entre fluide et point aléatoire. Cette correspondance est encore très vague. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de la préciser en y introduisant certains éléments quantitatifs relatifs à la variation de la loi de probabilité de $X(t)$, $U(t)$, qui suffiront pour retrouver toutes les propriétés classiques du fluide associé au point aléatoire. Nous allons exploiter l'hypothèse que cette loi varie en fonction du temps suivant une équation fonctionnelle bien déterminée, dont nous étudierons d'abord les propriétés générales, et que nous appliquerons ensuite à des exemples.

En général, la masse est aléatoire. Il peut être utile d'introduire une masse aléatoire dans certains problèmes de mécanique des fluides où la densité est soumise à des fluctuations. D'autre part, l'introduction d'une masse aléatoire est indispensable si

l'on veut que la mécanique aléatoire satisfasse non plus à l'invariance galiléenne, mais à l'invariance relativiste. Mais des difficultés apparaissent lorsqu'on essaie d'introduire la transformation de Lorentz en mécanique aléatoire. Les quatre composantes d'impulsion d'univers sont mU_1, mU_2, mU_3, mc , m étant une masse aléatoire et c la vitesse de la lumière. Elles sont bien toutes quatre aléatoires. Par contre, les quatre composantes de position sont X_1, X_2, X_3, ct . La quatrième n'est pas aléatoire, ce qui est gênant, si l'on pense à ce qu'elle devient par l'effet d'une transformation de Lorentz. Elle le devient si l'on considère c comme aléatoire, ce qui est, à première vue, surprenant.

Cela laisserait supposer que la mécanique aléatoire n'est pas compatible avec la relativité restreinte, mais seulement avec la relativité générale, ce qui déborde un peu nos hypothèses initiales, et mériterait d'être étudié d'une façon approfondie.

Dans tous les exemples que nous traiterons, *la masse sera un nombre certain*. Nous nous contenterons donc dans la suite d'étudier le corpuscule aléatoire à masse non aléatoire, et pour fixer les idées, *nous prendrons sa masse comme unité de masse*.

4. — Variation d'une moyenne. Hypothèses fondamentales [11].

Nous partons d'un point matériel aléatoire $X(t)$ de masse unité. Nous le supposons d'abord à une seule dimension, pour fixer les idées. La *vitesse* de ce point est bien définie. C'est la *dérivée en moyenne quadratique* $U(t)$ de $X(t)$. Mais nous ne faisons *aucune hypothèse sur l'accélération* : $U(t)$ n'est pas nécessairement une fonction aléatoire dérivable. Nous imposons seulement à $U(t)$ d'être continue en moyenne quadratique.

Soit alors $G(x, u)$ une fonction *bornée*, réelle ou complexe, de x, u . La moyenne $\bar{G}$ de $G(X, U)$ existe. C'est une fonction du temps, que nous supposons dérivable.

Supposons en outre que G admette des dérivées partielles secondes continues et bornées et appliquons à G la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} G(y, v) - G(x, u) &= (y - x) \frac{\partial G}{\partial x} + (v - u) \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2} (y - x)^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} \\ &\quad + (y - x)(v - u) \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial u} + \frac{1}{2} (v - u)^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial u^2}, \\ G_1 &= G[x + \theta(y - x), u + \theta(v - u)], \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Faisons décrire à x, y, u, v toutes les valeurs possibles des variables aléatoires

$$X(t), \quad X(t + \tau), \quad U(t), \quad U(t + \tau).$$

Divisons par τ et prenons les moyennes. Le premier membre s'écrit :

$$\frac{1}{\tau} [\overline{G(Y, V)} - \overline{G(X, U)}] = \frac{\bar{G}(Y, V) - \bar{G}(X, U)}{\tau}.$$

Quand $\tau \rightarrow 0$, il tend vers $\frac{d}{dt} \bar{G}$.

Au second membre, $\frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\tau} \frac{\partial \bar{G}}{\partial X}$ tend vers $U(t) \frac{\partial \bar{G}}{\partial X}$.

En effet $\frac{Y - X}{\tau} \frac{\partial G}{\partial X}$ signifie :

$$\frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} \frac{\partial G}{\partial X} [X(t), X(t + \tau)].$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left[\frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} - U(t) \right] \frac{\partial G}{\partial X} \leq \sqrt{\left[\frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} - U(t) \right]^2} \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial X} \right)^2}.$$

Le second radical est borné, et le premier tend vers 0, d'après la définition de la dérivée en moyenne quadratique.

Le terme $\frac{1}{\tau} \overline{[X(t + \tau) - X(t)]^2} \frac{\partial^2 G_1}{\partial X^2}$ tend vers 0 avec τ . En effet, $\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}$ étant borné, il suffit que $\frac{1}{\tau} \overline{[X(t + \tau) - X(t)]^2}$ tende vers 0, ce qui résulte de ce que $\frac{1}{\tau^2} \overline{[X(t + \tau) - X(t)]^2}$ tend vers une limite, égale à $\overline{U^2(t)}$.

$\frac{1}{\tau} \overline{[X(t + \tau) - X(t)] [U(t + \tau) - U(t)]} \frac{\partial^2 G_1}{\partial X \partial U}$ tend aussi vers 0. En effet, $\frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial u}$ étant borné, il suffit que $\frac{1}{\tau} \overline{[X(t + \tau) - X(t)] [U(t + \tau) - U(t)]}$ tende vers 0. Or le module de cette quantité est au plus égal à :

$$\frac{1}{\tau} \sqrt{\overline{[X(t + \tau) - X(t)]^2}} \sqrt{\overline{[U(t + \tau) - U(t)]^2}}.$$

Le second radical tend vers 0, parce que $U(t)$ est continue en moyenne quadratique, et le premier tend vers une limite finie, égale à $\sqrt{\overline{U^2}}$. Le produit tend donc vers 0.

Il reste donc :

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \overline{G} = \overline{U \frac{\partial G}{\partial X}} + \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \overline{[U(t + \tau) - U(t)] \frac{\partial G}{\partial U}} + \frac{1}{2} \overline{[U(t + \tau) - U(t)]^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial U^2}} \right\}.$$

La limite du second membre, étant égale à $\frac{d}{dt} \overline{G} - \overline{U \frac{\partial G}{\partial X}}$, existe. Nous nous intéressons au cas où cette limite peut être mise sous la forme :

$$\overline{AG},$$

A étant un opérateur linéaire de l'espace L^∞ (espace des fonctions mesurables bornées de x, u). Nous étudierons plus loin des exemples où cette circonstance se produit.

On a alors :

$$(2) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \overline{G} = \overline{U \frac{\partial G}{\partial X}} + \overline{AG}}.$$

Précisons la signification de cette équation. Si l'on se donne la loi de probabilité du couple $X(t)$, $U(t)$ à l'instant t , on ne peut pas, en général, calculer le second membre de (1). Autrement dit, l'évolution d'une moyenne $\overline{G}$ entre t et $t + dt$ ne dépend pas seulement de lois de probabilité à l'instant t . Elle tient compte de la dépendance stochastique entre les états successifs du point aléatoire. Nous faisons ici l'hypothèse qu'il existe un procédé de calcul qui, grâce à la structure particulière de $X(t)$, ou pour d'autres raisons de *caractère plus « mécanique »* (dont nous verrons des exemples), permette de calculer $d\overline{G}$ connaissant simplement l'état du point aléatoire à l'instant t (structure du couple $X(t)$, $U(t)$ au sens de Bernoulli). La structure de l'équation (2) n'est pas complètement indépendante des propriétés des lois de probabilité à deux instants, mais nous supposons qu'elle en dépend le moins possible. On peut dire aussi (moyennant quelques restrictions concernant la forme de l'opérateur A) que, grâce à l'équation (2), on a un moyen théorique de calculer la moyenne $\overline{G}$ à l'instant t , connaissant la forme de la fonction G et la seule loi de probabilité du couple $X(t)$, $U(t)$ à l'instant $t = 0$.

(2) est l'équation fondamentale qui fixe ce que l'on peut appeler la structure de la fonction aléatoire $U(t)$.

Si l'on prend pour G une fonction de u seul, on voit que :

$$\frac{d}{dt} \overline{G}(U) = \overline{AG}.$$

Si l'on prend pour G une fonction de x seul, on remarque que, d'après les propriétés des fonctions aléatoires dérivables,

$$\frac{d}{dt} \overline{G} = \overline{U \frac{\partial G}{\partial X}}.$$

et par suite :

$$\boxed{\overline{AG}(X) = 0}.$$

Remarque. — Supposons que A soit un opérateur différentiel de la forme :

$$A = \sum_{n, p=0}^{\infty} a_{np}(x, u, t) \frac{\partial^{n+p}}{\partial x^n \partial u^p}$$

Supposons, d'autre part, que les moments $\overline{X}$, $\overline{X^2}$, ..., $\overline{X^m}$ existent jusqu'à un ordre m déterminé. Il n'est plus alors nécessaire de se limiter à des fonctions G bornées. Prenons successivement $G = 1$, x , x^2 , ..., x^m . Nous voyons que :

$$a_{00} = 0, \quad a_{10} = 0, \quad a_{20} = 0, \quad \dots, \quad a_{m0} = 0,$$

de sorte que A ne contient aucun terme en $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ pour $n \leq m$. Si tous les moments de X existent, A ne contient aucun terme en $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$.

5. — Équation fondamentale relative aux fonctions caractéristiques [3].

Prenons :

$$G = e^{i(\alpha x + \beta u)}, \quad \alpha, \beta \text{ paramètres réels.}$$

Alors $\overline{G} = \varphi(\alpha, \beta)$ est la *fonction caractéristique* du couple de variables aléatoires $X(t), U(t)$:

$$U \frac{\partial \overline{G}}{\partial X} = i \alpha \overline{U e^{i(\alpha X + \beta U)}} = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}.$$

Enfin :

$$\overline{AG} = \overline{A e^{i(\alpha X + \beta U)}},$$

A opère sur $e^{i(\alpha x + \beta u)}$ considéré comme fonction de x, u .

Supposons qu'il existe un opérateur B agissant sur les fonctions de α, β , et tel que :

$$A_{x,y} e^{i(\alpha x + \beta u)} = B_{\alpha,\beta} e^{i(\alpha x + \beta u)}.$$

Dans ce cas :

$$\overline{A e^{i(\alpha X + \beta U)}} = \overline{B e^{i(\alpha X + \beta U)}} = B \varphi,$$

et la fonction caractéristique φ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$(3) \quad \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = B \varphi}.$$

Exemple : A est un opérateur différentiel du type introduit ci-dessus, que nous écrirons ici :

$$A = A\left(x, u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = \sum a_{npr} x^r u^s \frac{\partial^{n+p}}{\partial x^n \partial u^p},$$

la série AG étant convergente tout au moins lorsqu'on prend :

$$G = e^{i(\alpha x + \beta u)}.$$

Le terme

$$x^r u^s \frac{\partial^{n+p}}{\partial x^n \partial u^p} e^{i(\alpha x + \beta u)},$$

s'écrit :

$$(i\alpha)^n (i\beta)^p x^r u^s e^{i(\alpha x + \beta u)}.$$

Mais :

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial \alpha^r \partial \beta^s} e^{i(\alpha x + \beta u)} = (ix)^r (iu)^s e^{i(\alpha x + \beta u)}.$$

Donc :

$$\overline{X^r U^s \frac{\partial^{n+p}}{\partial X^n \partial U^p} e^{i(\alpha X + \beta U)}} = (i\alpha)^n (i\beta)^p \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^r \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \beta}\right)^p \overline{e^{i(\alpha X + \beta U)}}.$$

Finalement :

$$\overline{Ae^{i(\alpha x + \beta u)}} = \sum_{nprs} a_{nprs} (i\alpha)^n (i\beta)^p \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^r \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \beta}\right)^p \varphi.$$

On peut donc écrire :

$$(4) \quad B\left(\alpha, \beta, \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta}\right) = A\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \beta}, i\alpha, i\beta\right),$$

étant entendu que, dans cette opération, on doit commencer par dériver, et multiplier ensuite.

6. — Cas où il existe une densité de probabilité.

Il est intéressant d'étudier ce que deviennent les équations fondamentales lorsque la loi de probabilité de $X(t)$, $U(t)$ est *absolument continue*, c'est-à-dire admet une densité $f(x, u, t)$ inverse de Fourier de φ :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta, t) &= \int e^{i(\alpha x + \beta u)} f(x, u, t) dx du = \mathfrak{C}f, \\ f(x, u, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-i(\alpha x + \beta u)} \varphi(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta = \mathfrak{C}^{-1}\varphi, \end{aligned}$$

les intégrales étant étendues, comme on sait, à tout le plan des x, u ou des α, β .

Utilisons d'abord l'opérateur B : comme $\varphi = \mathfrak{C}f$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{C}f = \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} \mathfrak{C}f + B \mathfrak{C}f.$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{C}f &= \mathfrak{C} \frac{\partial f}{\partial t}, \\ \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} \mathfrak{C}f &= \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} \int e^{i(\alpha x + \beta u)} f dx du = i\alpha \int e^{i(\alpha x + \beta u)} u f dx du \\ &= \int u f \frac{\partial}{\partial x} e^{i(\alpha x + \beta u)} dx du \\ &= \int \left[u f e^{i(\alpha x + \beta u)} \right]_{x=-\infty}^{+\infty} du - \int e^{i(\alpha x + \beta u)} u \frac{\partial f}{\partial x} dx du. \end{aligned}$$

f est une fonction positive sommable. Donc f s'annule pour $x = -\infty$ et $x = +\infty$, et le crochet s'annule. L'intégrale étant égale à $\mathfrak{C}\left(u \frac{\partial f}{\partial x}\right)$, on a :

$$\mathfrak{C}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x}\right] = B \mathfrak{C}f,$$

soit :

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \mathfrak{C}^{-1} B \mathfrak{C}f.$$

f est donc solution d'une équation fonctionnelle analogue à celle que vérifie la fonction caractéristique, l'opérateur du second membre étant le transformé de B par l'opérateur de Fourier $\mathfrak{F}$.

Mais on n'est pas sûr de l'existence de B . Partons donc de l'équation :

$$\frac{d}{dt} \overline{G} = u \overline{\frac{\partial G}{\partial x}} + \overline{A} G.$$

Écrivons-la explicitement :

$$\frac{d}{dt} \int f G dx du = \int f u \frac{\partial G}{\partial x} dx du + \int f A G dx du.$$

Le premier terme est égal à :

$$\int G \frac{\partial f}{\partial t} dx du.$$

Le second s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int u \frac{\partial}{\partial x} (f G) dx du - \int G u \frac{\partial f}{\partial x} dx du, \\ &= \int u [f G]_{x=-\infty}^{+\infty} du - \int G u \frac{\partial f}{\partial x} dx du. \end{aligned}$$

Comme G est bornée, le crochet s'annule, et il reste le second terme seul.

Supposons maintenant que l'on puisse écrire :

$$\int f A G dx du = \int G A' f dx du.$$

G appartient à l'espace L^∞ des fonctions mesurables bornées, f appartient à l'espace L^1 des fonctions absolument sommables. On pourrait penser qu'il y a lieu de se borner aux « fonctions positives sommables » mais le fait que f soit positif n'intervient pas, et il pourra être utile de ne pas s'en servir. L^1 est l'espace dual de L^∞ . Rappelons ce que cela signifie.

Considérons l'intégrale :

$$\int f G dx du.$$

Si f appartient à L^1 et G à L^∞ , cette intégrale est inférieure en module à $K \int |f| dx du$, K étant le maximum du module de G . Elle a donc un sens. Réciproquement, on démontre que, si l'intégrale précédente existe pour toute fonction f absolument sommable, G est bornée (au moins dans tout domaine à distance finie). On dit que L^1 et L^∞ sont duals l'un de l'autre. (Ce théorème est vrai quel que soit l'intervalle d'intégration, fini ou infini.)

On peut plus généralement chercher à quelle condition l'intégrale :

$$\int fG \, dx \, du,$$

existe, f étant une fonction positive telle que f^p soit sommable (espace L^p). Le cas où $p = 1$ est un cas limite, qui présente certaines singularités.

Bornons-nous, pour simplifier, au cas classique de fonctions d'une variable seulement définies sur un intervalle fini (a, b) . L'inégalité de Hölder :

$$\int_a^b fG \, dx \leq \left[\int_a^b f^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_a^b G^q \, dx \right]^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1, \quad q > 1,$$

montre que, si G^q est sommable, fG l'est aussi, et la réciproque peut être établie. L'espace L^q est le dual de L^p .

Si $q = p = 2$, L^q se confond avec L^p . C'est l'espace de Hilbert. Il n'est pas alors nécessaire que f soit positive, ni même réelle. Si f et G sont complexes, on remplace l'intégrale $\int fG \, dx$ par $\int fG^* \, dx$, où G^* est l'imaginaire conjugué de G . C'est le produit scalaire (f, G) de deux éléments de L^2 . Dans le cas général, cette intégrale représente le produit scalaire d'un élément de L^p par un élément de l'espace dual L^q .

Les espaces L^p sont manifestement des espaces vectoriels. On peut les normer, en appelant longueur de f l'intégrale :

$$\left[\int f^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}},$$

et dans le cas de L^2 ,

$$\left[\int |f|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas de L^1 , la longueur est donc $\int |f| \, dx$.

Si, d'autre part, $q \rightarrow \infty$, on sait que $\left[\int |G|^q \, dx \right]^{\frac{1}{q}}$ tend vers le maximum de $|G|$ dans l'intervalle d'intégration.

On est ainsi conduit à prendre la borne supérieure de $|G|$ comme définition de la longueur dans L^∞ .

Ceci rappelé, l'intégrale $\int fAG \, dx \, du$ est le produit scalaire de f par AG .

On suppose l'existence d'un opérateur adjoint A' de A dans L^1 , tel que :

$$(f, AG) = (G, A'f).$$

S'il en est ainsi, on a :

$$\int G \left[\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} - A'f \right] dx \, du = 0.$$

G est une fonction bornée. On peut la supposer nulle à l'infini, et même en dehors d'un domaine limité en toutes directions.

G est donc une fonction continue, pourvue de dérivées secondes continues, et nulle sur un contour donné, et à part cela arbitraire. On peut appliquer le lemme fondamental du calcul des variations, et l'on voit que :

$$(6) \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = A' f}.$$

A la condition $\overline{AG(X)} = 0$, ou $\int f AG(x) dx du = 0$, correspond ici la condition :

$$\int G(x) A' f dx du = 0,$$

c'est-à-dire, vu l'arbitraire de G,

$$\int A' f du = 0.$$

Cette condition est nécessaire pour que X(t) soit dérivable en moyenne quadratique.

Remarque. — L'équation (6) donne en somme le moyen de calculer $f(x, u, t)$ connaissant $f(x, u, 0)$. Supposons, pour simplifier, que A' ne dépende pas explicitement de t et posons $C = A' - u \frac{\partial}{\partial x}$.

Admettons que f soit développable en série de Taylor au voisinage de $t = 0$ et posons $f(x, u, 0) = f_0(x, u)$:

$$f(x, u, t) = f_0 + t \frac{\partial f}{\partial t}(x, u, 0) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, u, 0) + \dots$$

Mais :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Cf, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} Cf = C \frac{\partial f}{\partial t} = C^2 f, \quad \dots$$

Donc :

$$f(x, u, t) = f_0 + tCf_0 + \frac{t^2}{2} C^2 f_0 + \dots = e^{tC} f_0.$$

La formule $f(x, u, t) = e^{tC} f_0$ résout formellement le problème.

L'existence de l'opérateur A', qui constitue l'hypothèse fondamentale, revient à admettre que l'on sait calculer la loi de probabilité de X(t), U(t) à l'instant t lorsqu'on s'en donne arbitrairement l'expression initiale pour $t = 0$.

D'une façon plus précise, elle donne la transformation infinitésimale, si elle existe, de la famille de transformations à un paramètre t qui fait passer de $f(x, u, 0)$ à $f(x, u, t)$.

La famille de transformations existe sûrement. Elle est en effet définie par la « probabilité de passage ». Soit $p(x, u, t; x_0, u_0, t_0)$ la densité de probabilité liée de X(t),

$U(t)$, lorsque $X(t_0) = x_0$, $U(t_0) = u_0$. D'après le théorème des probabilités totales, on passe de $f(x, u, 0)$ à $f(x, u, t)$ par la transformation intégrale linéaire :

$$f(x, u, t) = \int p(x, u, t; x_0, u_0, 0) f(x_0, u_0, 0) dx_0 du_0,$$

qui représente la solution de l'équation (6) correspondant aux conditions initiales. Ceci explique que les propriétés de l'opérateur A' , qui définit seulement l'évolution d'une loi de probabilité en fonction du temps, soient en rapport avec celles de la *fonction aléatoire* $X(t)$, par l'intermédiaire du noyau p .

7. — La notion générale d'équation de transfert. Forme définitive de l'opérateur A [5-7-11].

Conservons l'hypothèse d'une densité de probabilité. Soit $\rho(x, t) = \int f du$ la densité de probabilité de $X(t)$. Introduisons une fonction bornée $g(u)$, multiplions les deux membres de l'équation (6) par $g(u)$ et intégrons par rapport à u seulement :

$$\int g \frac{\partial f}{\partial t} du + \int u g \frac{\partial f}{\partial x} du = \int g A' f du.$$

Le premier membre de cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \overline{g} + \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{gu},$$

où $\overline{g}$, $\overline{gu}$ sont les moyennes liées de g et gu pour $X = x$.

Nous allons faire maintenant une *nouvelle hypothèse* sur l'opérateur A . A opère sur les fonctions bornées de x, u , et en particulier sur les fonctions bornées de u seulement. Nous supposons que, *pour tout* x , A' est l'adjoint de A , A opérant sur les fonctions bornées de u , et A' sur les fonctions absolument sommables de u . Cela veut dire que, quel que soit x ,

$$(7) \quad \int g A' f du = \int f A g du.$$

Cherchons quelles restrictions cette hypothèse apporte à la forme de l'opérateur A . Pour cela, multiplions cette égalité membre à membre par une fonction bornée $h(x)$ et intégrons par rapport à x :

$$\int h(x) g(u) A' f dx du = \int h(x) A g(u) dx du.$$

Or si l'on prend :

$$G(x, u) = h(x) g(u),$$

on a aussi :

$$\int h(x) g(u) A' f dx du = \int f A [h(x) g(u)] dx du.$$

Les quantités $h Ag$ et $A(hg)$ ont donc même valeur moyenne et cela pour toute loi de probabilité f . Par suite :

$$(8) \quad h(x) Ag(u) = A[h(x) g(u)],$$

quelles que soient les fonctions bornées $h(x)$ et $g(u)$.

Supposons, pour mieux faire apparaître cette condition, que A soit un opérateur différentiel :

$$A = \sum_{n,p=0}^{\infty} a_{np}(x, u, t) \frac{\partial^{n+p}}{\partial x^n \partial u^p}.$$

On a alors :

$$h(x) \sum_{p=0}^{\infty} a_{0p}(x, u, t) \frac{\partial^p g}{\partial u^p} = \sum_{n,p=0}^{\infty} a_{np}(x, u, t) \frac{\partial^n h}{\partial x^n} \frac{\partial^p g}{\partial u^p}.$$

Il en résulte que $a_{np} = 0$ si $n \neq 0$.

D'autre part, pour $g(u) = 1$,

$$h(x) A(1) = Ah(x).$$

Si donc $A(1) = 0$, $Ah(x) = 0$. On réalise la première condition imposée au paragraphe 4 à l'opérateur A en prenant simplement $a_{00}(x, u, t) = 0$. A prend la forme :

$$(9) \quad A = \sum_{p=1}^{\infty} a_p(x, u, t) \frac{\partial^p}{\partial u^p},$$

avec :

$$A' = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial u^p} a_p(x, u, t).$$

En résumé :

Définition de l'opérateur A : A est un opérateur linéaire de l'espace L^∞ , tel que :

$$A(1) = 0,$$

$$h(x) Ag(u) = A[h(x) g(u)], \quad \text{pour tous } h(x), g(u) \text{ de } L^\infty.$$

A possède un adjoint A' dans L^1 .

Si A est un opérateur différentiel, il a la forme (9) donnée ci-dessus.

Ceci posé, on peut donc écrire :

$$\int g A' f du = \int f A g du = \overline{{}_p A g},$$

$\overline{Ag}$ étant la moyenne liée de Ag pour $X = x$.

On aboutit à l'équation :

$$(10) \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{g} + \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{gu} = \rho \overline{Ag}}.$$

que nous appellerons, en élargissant le champ d'application de la terminologie de la théorie cinétique des gaz, *l'équation générale de transfert* relative à la fonction aléatoire dérivable $X(t)$.

Remarque. — Nous avons établi l'équation de transfert d'une fonction $g(u)$. On pourrait prendre plus généralement une fonction $G(x, u, t)$. Il suffit de vérifier que, moyennant la forme de A , on a encore :

$$\int G A' f du = \int f A G du,$$

ce qui est immédiat.

On a alors :

$$\begin{aligned} \int G \frac{\partial f}{\partial t} du &= \frac{\partial}{\partial t} \int f G du - \int f \frac{\partial G}{\partial t} du = \frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{G} - \rho \overline{\frac{\partial G}{\partial t}}, \\ \int u G \frac{\partial f}{\partial x} du &= \frac{\partial}{\partial x} \int f u G du - \int f u \frac{\partial G}{\partial x} du = \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{Gu} - \rho \overline{u \frac{\partial G}{\partial x}}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{G} + \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{Gu} = \rho \left[\overline{\frac{\partial G}{\partial t}} + \overline{u \frac{\partial G}{\partial x}} + \overline{Ag} \right],$$

ou encore :

$$(11) \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{G} + \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{Gu} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + A \right) \bar{G}}.$$

8. — Hydrodynamique du point aléatoire [7].

La théorie précédente se généralise sans peine à une fonction aléatoire vectorielle à n composantes $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$ admettant les dérivées $U_1(t)$, $U_2(t)$, ..., $U_n(t)$ en moyenne quadratique.

Nous désignerons par :

- $\varphi(\alpha_i, \beta_i, t)$ la fonction caractéristique des X_i , U_i ;
- $f(x_i, u_i, t)$ la densité de probabilité des X_i , U_i , si elle existe;
- $G(x_i, u_i, t)$ une fonction bornée et convenablement dérivable;
- $\rho(x_i, t)$ la densité de probabilité des X_i , si elle existe.

L'opérateur A possède les mêmes propriétés que dans le cas d'une dimension. Si c'est un opérateur différentiel, il est de la forme :

$$A \left(x_i, u_i, \frac{\partial}{\partial u_i}, t \right),$$

le développement formel de la fonction A suivant les $\frac{\partial}{\partial u_i}$ n'ayant pas de terme constant.

Les équations fondamentales sont les suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum x_i \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} = A \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \beta}, i \beta, t \right) \varphi. \\ \frac{d}{dt} \bar{G} = \sum u_i \frac{\partial \bar{G}}{\partial x_i} + \bar{A} G. \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \sum u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = A' f. \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi G + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi G u_i = \varphi \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i} + A \right) \bar{G}, \end{array} \right.$$

et, dans le cas où f existe,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum x_i \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} = \varphi A \varphi^{-1} \varphi.$$

Si l'on fait $G = 1$, on obtient :

$$(13) \quad \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi \bar{u}_i) = 0},$$

car $\overline{A(1)} = 0$, comme conséquence de la dérivabilité de $X(t)$.

On reconnaît l'équation de continuité classique de la mécanique des fluides. φ (ou tout nombre numériquement proportionnel à φ) joue le rôle de *densité*. La *vitesse* est la moyenne liée, en chaque point x_i , de la vitesse du point aléatoire initial.

Pour continuer, et approfondir les rapports entre la mécanique aléatoire et la mécanique des fluides, il faut pouvoir opérer le transfert des quantités u_i et $\sum u_i^2$. Cela exige l'existence des moments d'ordres 1 et 2 des fonctions aléatoires $U_i(t)$.

G n'est plus nécessairement une fonction bornée. Par suite, il ne suffit plus que $|f|$ soit sommable. f appartient au sous-espace de L^1 constitué par les fonctions telles que :

$$\int |f| u_i^2 dx du, \quad dx du = dx_1 dx_2 \dots dx_n du_1 du_2 \dots du_n$$

existe. On peut aussi dire que φ est une fonction caractéristique deux fois dérivable par rapport aux β_i .

Ceci posé, prenons $G = u_i$. Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \overline{u_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \overline{u_i u_j} = \rho \overline{A u_i}.$$

Posons $u_i = \overline{u_i} + u'_i$. u'_i est une *vitesse d'agitation*. On a :

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u'_i u'_j}.$$

En tenant compte de l'équation de continuité, on trouve :

$$(14) \quad \boxed{\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \sum_j \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = \overline{A u_i} - \frac{1}{\rho} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \overline{u'_i u'_j}}.$$

Cette équation s'interprète immédiatement :

THÉORÈME. — *A un point matériel aléatoire $X(t)$ ayant une vitesse aléatoire $U(t)$ bien définie, on peut associer moyennant les hypothèses du paragraphe 7 un fluide dont les éléments sont énumérés ci-dessous :*

Sa *densité* est la densité de probabilité $\rho(x_i, t)$ des $X_i(t)$;

Sa *vitesse* $\overline{u_i}$ est la moyenne liée en un point x_i de la vitesse du point aléatoire;

Le *champ de forces* auquel il est soumis a pour composantes $\overline{A u_i}$;

Ses *tensions* $T_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ sont, au facteur $-\rho$ près, identiques au tenseur de corrélation du champ de vitesses d'agitation.

Remarques. — 1° On voit que, si l'on prend comme axiome statistique l'identité entre un fluide et un point matériel aléatoire, les équations classiques de la mécanique des fluides sont loin de décrire complètement le fluide. Elles ne donnent en effet que des renseignements très fragmentaires sur l'opérateur A qui, lui-même, ne permettrait guère plus que de déterminer la loi de probabilité des $X_i(t)$, $U_i(t)$ à un instant unique t , alors que la définition complète du point aléatoire exige la connaissance de la loi de probabilité relative à un ensemble arbitraire d'instants.

2° En calcul des probabilités, la fonction f est positive. Mais tout ce qui précède subsiste formellement si f n'est plus nécessairement positive, tout en restant absolument sommable et normée. On trouve encore des équations hydrodynamiques, mais certaines de leurs propriétés disparaissent. Considérons, par exemple, les tensions $T_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$.

La force de tensions agissant sur un élément unité normale au vecteur unitaire λ_i est (fig. 1) :

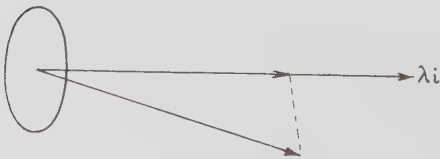


Fig. 1

$$\sum_j T_{ij} \lambda_j,$$

et sa projection normale est :

$$\begin{aligned} \sum_{ij} T_{ij} \lambda_i \lambda_j &= -\rho \sum \lambda_i \lambda_j \overline{u'_i u'_j} \\ &= -\rho \overline{\left(\sum \lambda_i u'_i \right)^2}. \end{aligned}$$

Si f est positive, cette projection est négative. Cela veut dire qu'on a affaire à un vrai fluide; la composante normale des forces de tensions est une pression qui s'oppose à l'expansion du fluide, contrairement à ce qui se passerait pour un solide élastique tendu.

Si, par contre, f est éventuellement négative, $\Sigma T_{ij} \lambda_i \lambda_j$ peut être positif.

3° En mécanique classique, les équations de l'hydrodynamique sont une conséquence de la relation fondamentale $F = m \gamma$ de la dynamique. Elles supposent donc la définition préalable de l'accélération. Ici, au contraire, on n'a pas besoin de supposer l'existence de l'accélération du point aléatoire initial. La notion de *force* s'introduit d'elle-même, à partir du transfert de la vitesse, dans l'approximation hydrodynamique du point aléatoire. C'est une notion *moyenne*.

9. — Thermodynamique du point aléatoire.

Étudions maintenant le transfert de la grandeur :

$$\begin{aligned} G &= c'^2 = \sum u_i'^2 = \sum (u_i - \bar{u}_i)^2. \\ \overline{Gu_i'} &= (\overline{u_i'} + \overline{u_i'}) \overline{c'^2} = \overline{u_i'} \overline{c'^2} + \overline{u_i' c'^2}; \\ u_i \frac{\partial G}{\partial x_i} &= -2 \sum_j \overline{(u_i' + u_i')} u_j' \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_i} = -2 \sum_j \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_i}; \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= -2 \sum_i \overline{u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial t}} = 0. \end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \overline{c'^2} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \rho [\overline{u_i' c'^2} + \overline{u_i' c'^2}] = \rho \left[-2 \sum \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_i} + \overline{Ac'^2} \right].$$

En tenant compte de l'équation de continuité, il reste :

$$(15) \quad \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial t} + \sum \overline{u_i' \frac{\partial c'^2}{\partial x_i}} \right] + \frac{1}{\rho} \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \rho \frac{\overline{u_i' c'^2}}{2} + \sum \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \overline{Ac'^2}.$$

Cette équation a la forme de l'équation de Clausius en thermodynamique. Elle exprime l'équilibre énergétique de la masse fluide contenue dans un volume donné, compte tenu de l'énergie cinétique d'agitation $\frac{1}{2} \overline{c'^2}$, qui, en théorie cinétique des gaz, est proportionnelle à la température. On y voit apparaître la divergence du vecteur de composantes $\rho \overline{u_i' c'^2}$, qui correspond au flux de chaleur à travers la surface frontière du volume, et la fonction dissipative :

$$\sum_{ij} T_{ij} \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_i} = -\rho \sum_{ij} \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_i}.$$

Le terme $\overline{Ac'^2}$ correspond à la possibilité pour le fluide d'échanger de l'énergie avec l'extérieur autrement que par transfert de quantité de mouvement d'ensemble ou d'agitation. Il est nul dans la théorie cinétique des gaz, où les molécules subissent des chocs parfaits.

On peut appeler *pression* du fluide l'invariant tensoriel :

$$p = -\frac{1}{3} \sum T_{ii} = \frac{1}{3} \rho \overline{c'^2}.$$

$\overline{c'^2}$ étant proportionnel à la température, on voit que le fluide associé au point aléatoire cartésien obéit à la loi de Gay-Lussac.

10. — Extension des résultats précédents. Systèmes de n points aléatoires.

Un vecteur aléatoire à n composantes cartésiennes peut être considéré comme un point unique, par exemple, si $n = 3$, comme un point aléatoire isolé dans l'espace ordinaire. C'est ce point aléatoire qui est équivalent à un fluide. On peut ainsi représenter par *un unique point aléatoire* un gaz monoatomique, sans analyser en détails sa structure moléculaire. Mais on peut aussi imaginer que les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ décrivent l'ensemble des coordonnées d'un système de plusieurs particules. Si, pour simplifier le langage, nous supposons que chacune des variables x_i représente une particule, nous avons un système de n particules. Dans cette nouvelle conception, on représente un gaz par un *système de n point aléatoire*, en tenant compte dans le détail des interactions entre les molécules, au lieu de se faire du gaz une image uniquement statistique. L'essentiel est d'arriver dans les deux cas aux mêmes moyennes physiques.

Il est facile de montrer qu'un ensemble E_s de $s \leq n$ particules appartenant au système conduit à une représentation hydrodynamique analogue à celle du système total. Cet ensemble constitue en effet un véritable point aléatoire à s coordonnées. Supposons, par exemple, que le système initial admette une densité de probabilité $f(x_i, u_i, t)$ et désignons par :

$$f_{12\dots s}(x_i, u_i, t) = \int f dx_{s+1} du_{s+1} \dots dx_n du_n \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

la densité de probabilité de l'ensemble E_s . Cherchons l'équation fonctionnelle que vérifie $f_{1\dots s}$. On sait que :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = A' f, \quad A' = \sum_{p_i=1}^{\infty} (-1)^{p_1+\dots+p_n} \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n}}{\partial u_1^{p_1} \partial u_2^{p_2} \dots \partial u_n^{p_n}} a_{p_1 p_2 \dots p_n}(x_i, u_i, t).$$

Intégrons par rapport à $x_{s+1}, u_{s+1}, \dots, x_n, u_n$. L'intégrale de $\frac{\partial f}{\partial t}$ est $\frac{\partial f_{1\dots s}}{\partial t}$.

Si $i > s$, $\int \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = [f] = 0$. Si $i \leq s$, x_i, u_i jouent le rôle de constante dans l'intégration, et l'intégrale de $u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ est égale à $u_i \frac{\partial f_{1\dots s}}{\partial x_i}$. Au second membre, on a :

$$\int A' f dx_{s+1} du_{s+1} \dots dx_n du_n.$$

Utilisons la forme développée de A' . Si l'un des p_i correspondant à $i > s$ n'est pas nul, on peut intégrer une fois au moins par rapport à la variable u_i correspondante, et, à cause des conditions de régularité de f à l'infini, l'intégrale est nulle.

Il reste donc des termes de la forme :

$$(-1)^{p_1+\dots+p_s} \frac{\partial^{p_1+\dots+p_s}}{\partial u_1^{p_1} \dots \partial u_s^{p_s}} \int a_{p_1\dots p_s, 0\dots 0}(x_i, u_i, t) f dx_{s+1} du_{s+1} \dots dx_n du_n.$$

L'intégrale peut s'écrire $\bar{a}_{p_1\dots p_s, 0\dots 0} f_{1\dots s}$, le symbole $\bar{a}$ désignant la moyenne liée de a pour des valeurs fixées de $x_1, \dots, x_s, u_1, \dots, u_s$. On a donc :

$$\frac{\partial f_{1\dots s}}{\partial t} + \sum_{i=1}^s u_i \frac{\partial f_{1\dots s}}{\partial x_i} = \sum_{p_i=0}^{\infty} (-1)^{p_1+\dots+p_s} \frac{\partial^{p_1+\dots+p_s}}{\partial u_1^{p_1} \dots \partial u_s^{p_s}} \bar{a}_{p_1\dots p_s, 0\dots 0}(x_i, u_i, t) f_{1\dots s}.$$

Cette équation fonctionnelle entraîne, pour l'ensemble E_s , les mêmes conséquences hydrodynamiques que l'équation (6) pour le système complet.

Ces remarques élémentaires conduisent à des conséquences d'une grande importance lorsqu'on particularise la forme de l'opérateur A . Il n'est, en effet, pas absolument indifférent de parler d'un point à 3 n dimensions ou de n points à trois dimensions. Supposons, à titre d'exemple, que f vérifie l'équation de Liouville de la mécanique statistique classique, qui est un cas particulier de l'équation du point aléatoire doublement dérivable que nous étudierons un peu plus loin. On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0,$$

γ_i étant fonction de $x_1, \dots, x_n$ (et de t), qui joue le rôle de la force extérieure dans l'espace à 3 n dimensions.

Dans le cas d'un système, γ_i prend une forme simplifiée, qui traduit le fait que chaque point est soumis :

1° à des forces extérieures $C_i(x_i)$, C_i dépendant seulement des coordonnées x_i du point considéré;

2° à des forces d'interaction avec chacun des autres points, de la forme :

$$\sum_j C_{ij}(x_i, x_j),$$

dépendant des couples de points.

La fonction $\gamma_n (x_1, \dots, x_i)$ est de la forme particulière :

$$\gamma_i = C_i (x_i) + \sum_{j \neq i} C_{ij} (x_i, x_j).$$

Dans ces conditions, calculons $\int A' f dx_{s+1} \dots du_n$.

Nous avons deux sortes de termes :

$$1^\circ \quad \int C_i (x_i) \frac{\partial f}{\partial u_i} dx_{s+1} \dots du_n;$$

si i prend les valeurs $s + 1, \dots, n$, on trouve 0;

si i prend les valeurs $1, \dots, s$, on peut écrire :

$$C_i (x_i) \frac{\partial}{\partial u_i} \int f dx_{s+1} \dots du_n = C_i (x_i) \frac{\partial}{\partial u_i} f_{1\dots s},$$

$$2^\circ \quad \int C_{ij} (x_i, x_j) \frac{\partial f}{\partial u_i} dx_{s+1} \dots du_n;$$

si i prend les valeurs $s + 1, \dots, n$, on trouve 0;

si i prend les valeurs $1, \dots, s$, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \int C_{ij} (x_i, x_j) f dx_{s+1} \dots du_n,$$

et intégrer par rapport aux u , et à tous les x , sauf x_j éventuellement.

Si $j \leq s$, on trouve donc :

$$\frac{\partial}{\partial u_i} C_{ij} (x_i, x_j) f_{1\dots s},$$

si $j > s$, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \int C_{ij} (x_i, x_j) f dx_{s+1} \dots du_n.$$

On arrive finalement à l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{1\dots s}}{\partial t} + \sum_{i=1}^s u_i \frac{\partial f_{1\dots s}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^s C_i (x_i) \frac{\partial f_{1\dots s}}{\partial u_i} + \sum_{ij=1}^s C_{ij} (x_i, x_j) \\ + \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^n \int C_{ij} (x_i, x_j) f_{1\dots s} dx_j du_j = 0. \end{aligned}$$

En particulier, si $s = 1$, on écrit ainsi les équations relatives à un point unique x_1 , qui sont :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + C_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_1} \sum_{j=2}^n \int C_{1j}(x_1, x_j) f_{1j} dx_j du_j = 0.$$

Au lieu d'introduire comme ci-dessus des moyennes liées, il peut être intéressant, grâce à la forme simplifiée de l'opérateur A' , de laisser subsister dans une même équation f_1 et les f_{1j} . Des équations de ce type semblent avoir été décrites pour la première fois par J. YVON [50] en 1935, et, en faisant quelques hypothèses précises, dont celle du « chaos moléculaire », c'est-à-dire de l'indépendance des molécules très éloignées, il a donné une remarquable démonstration de l'équation intégral-différentielle de Boltzmann.

Ce mode de démonstration a été repris plus récemment par BORN et GREEN, indépendamment de J. YVON, et nous en reparlerons plus loin.

CHAPITRE II

EXEMPLES MATHÉMATIQUES

11. — PREMIER EXEMPLE. — Fonctions aléatoires doublement dérivables [5-32-33].

Nous supposons ici que la vitesse $U(t)$ admet une dérivée en moyenne quadratique $\dot{U}(t)$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction aléatoire $\dot{U}(t)$ telle que, lorsque $\tau \rightarrow 0$,

$$\lim \left[\frac{U(t+\tau) - U(t)}{\tau} - \dot{U}(t) \right]^2 = 0.$$

Il s'agit de trouver la limite de l'expression (1) du paragraphe 4 :

$$\frac{1}{\tau} \left\{ \overline{[U(t+\tau) - U(t)] \frac{\partial G}{\partial U}} + \frac{1}{2} \overline{[U(t+\tau) - U(t)]^2 \frac{\partial^2 G}{\partial U^2}} \right\},$$

où :

$$G_1 = G[x + \theta(y - x), u + \theta(v - u)], \quad 0 < \theta < 1.$$

Le terme $\frac{1}{\tau} \overline{[U(t+\tau) - U(t)] \frac{\partial G}{\partial U}}$ tend vers $\overline{\dot{U}(t) \frac{\partial G}{\partial U}}$. En effet, en appliquant

l'inégalité de Schwarz à $\left[\overline{\frac{U(t+\tau) - U(t)}{\tau} \frac{\partial G}{\partial U}} \right]$, on vérifie que cette quantité tend vers 0.

Le terme $\frac{1}{2} \frac{1}{\tau} \overline{[U(t+\tau) - U(t)]^2 \frac{\partial^2 G}{\partial U^2}}$ tend vers 0. Si, en effet, $2M$ est une borne supérieure de $\left| \frac{\partial^2 G}{\partial U^2} \right|$, il est inférieur à :

$$M \frac{1}{\tau} \overline{[U(t+\tau) - U(t)]^2} = M \tau \overline{\left[\frac{U(t+\tau) - U(t)}{\tau} \right]^2},$$

produit par τ d'une quantité qui tend vers une limite finie, égale à $\overline{\dot{U}^2}$.

On obtient finalement l'équation fonctionnelle :

$$(16) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \bar{G} = \bar{U} \frac{\partial \bar{G}}{\partial X} + \dot{U} \frac{\partial \bar{G}}{\partial U}}.$$

Désignons par $\gamma(x, u, t)$ la moyenne liée de $\dot{U}(t)$ pour $X(t) = x$, $U(t) = u$.

THÉOREME. — Si $U(t)$ est dérivable en moyenne quadratique, et si, pour des raisons quelconques, on connaît la moyenne liée $\gamma(x, u, t)$ pour $X = x$, $U = u$, il existe un opérateur A du type indiqué au paragraphe 4, et cet opérateur a pour expression :

$$A = \gamma \frac{\partial}{\partial u}.$$

Conséquences. — La fonction caractéristique $\varphi(\alpha, \beta, t)$ de X, U vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = i \beta \gamma \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \beta}, t \right) \varphi.$$

S'il existe une densité de probabilité $f(x, u, t)$,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial u} (\gamma f),$$

car l'opérateur adjoint de A est $A' = - \frac{\partial}{\partial u} \gamma$.

L'équation fondamentale de transfert devient :

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho \overline{G} + \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{Gu} = \rho \left[\frac{\partial G}{\partial t} + u \frac{\partial G}{\partial x} + \gamma \frac{\partial G}{\partial u} \right].$$

Elle conduit aux conséquences hydrodynamiques prévues dans le cas général. La densité de force à laquelle est soumis le fluide a pour composantes, dans le cas de n dimensions,

$$\overline{Au_i} = \overline{\gamma_i}.$$

Ce sont les composantes de la moyenne liée de l'accélération du point aléatoire, pour les valeurs fixées x_i des coordonnées $X_i(t)$. Si l'on cherche à représenter le mouvement d'un fluide par un point doublement dérivable, on voit que la grandeur γ n'est pas totalement inconnue. On en connaît déjà la moyenne liée en un point, que l'on doit identifier avec la densité du champ de forces donné.

La grandeur énergétique $\frac{1}{2} \overline{AC^2}$ est ici égale à $\sum \overline{\gamma_i u_i'}$, produit scalaire moyen de la vitesse d'agitation par l'accélération.

L'existence d'une accélération aléatoire $\dot{U}(t)$, qui donne au point aléatoire une structure toute particulière, n'a pas d'influence très sensible sur la structure classique du fluide qui lui est associé. Cette influence ne se fait sentir que lorsqu'on étudie les propriétés spéciales de ce fluide considéré comme *turbulent*.

12. — DEUXIÈME EXEMPLE. **Fonctions aléatoires à accroissements indépendants.**
Calcul de la fonction caractéristique φ [5-11-39-42].

Nous étudions maintenant le cas où $U(t)$ est une fonction aléatoire à accroissements indépendants (1). Cela veut dire que, si $\tau > 0$, $U(t + \tau) - U(t)$ est une variable aléatoire indépendante de $U(t)$. On sait que $U(t)$ est la somme de deux termes indépendants, le premier gaussien, et le second satisfaisant à une loi de Poisson généralisée. Nous supposons le processus *homogène par rapport au temps*, et *dégénérant pour $t = 0$* . Nous nous ramènerons enfin à avoir $\dot{U}(t) = 0$.

Si $\overline{U^2}$ est fini, on sait que le logarithme de la fonction caractéristique φ_0 de $U(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\log \varphi_0(\alpha, t) = -\frac{1}{2} t \sigma^2 \alpha^2 + t \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\alpha s} - 1) d\mathcal{G}(s),$$

σ étant une constante et $\mathcal{G}$ une fonction de répartition. $\varphi_0(\alpha, \tau)$ est d'ailleurs la fonction caractéristique de $U(t + \tau) - U(t)$.

Divisons l'intervalle $(0, t)$ par des points arbitraires $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Appelons $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ les amplitudes des intervalles partiels.

Nous allons étudier la loi de probabilité du système de deux variables aléatoires $U(t)$ et $S = \sum \tau_i U(t_i)$:



Nous montrerons qu'elle tend vers une limite lorsque le plus grand des τ_i tend vers 0. S se présentera ainsi à la limite comme l'intégrale sur chaque épreuve de $U(t)$, et nous vérifierons ensuite que la fonction aléatoire $X(t)$ ainsi obtenue est dérivable en moyenne quadratique et a $U(t)$ pour dérivée.

La fonction caractéristique de S et U est la moyenne de :

$$e^{i\alpha S} e^{i\beta U} = e^{i\alpha(\tau_1 U_1 + \dots + \tau_n U_n) + i\beta U_n}.$$

Introduisons les accroissements $V_i = U_i - U_{i-1}$, qui sont *indépendants* entre eux. On a :

$$\begin{aligned} U_2 &= V_2 + U_1, \\ U_3 &= V_3 + V_2 + U_1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Par suite :

$$\tau_1 U_1 + \tau_2 U_2 + \dots + \tau_n U_n = t U_1 + (t - t_1) V_2 + (t - t_2) V_3 + \dots + (t - t_{n-1}) V_n.$$

(1) Pour calculer la fonction caractéristique, il ne suffit pas que $U(t)$ soit à accroissements *orthogonaux*.

On doit donc prendre la moyenne de :

$$e^{i\alpha U_1} e^{i\alpha(t-t_1)V_2} e^{i\alpha(t-t_2)V_3} \dots e^{i\alpha(t-t_{n-1})V_n} e^{i\beta(U_1+V_2+\dots+V_n)} \\ = e^{i(\alpha t+\beta)U_1} e^{i(\alpha t+\beta-\alpha t_1)V_2} e^{i(\alpha t+\beta-\alpha t_2)V_3} \dots e^{i(\alpha t+\beta-\alpha t_{n-1})V_n}.$$

C'est le produit des moyennes des termes. Si donc $\varphi(\alpha, \beta, t)$ est la fonction caractéristique de $X(t)$, $U(t)$, on a :

$$\log \varphi(\alpha, \beta, t) = \lim \sum \log \overline{e^{i(\alpha t+\beta-\alpha t_{i-1})V_i}}.$$

On voit apparaître la fonction caractéristique de $V_i = U_i - U_{i-1}$,

$$\overline{e^{i(\alpha t+\beta-\alpha t_{i-1})V_i}} = \varphi_0(\alpha t + \beta - \alpha t_i, \tau_i),$$

$$\log \varphi_0(\alpha t + \beta - \alpha t_i, \tau_i) = -\frac{1}{2} \tau_i \sigma^2 (\alpha t + \beta - \alpha t_i)^2 + \tau_i \int_{-\infty}^{\infty} [e^{is(\alpha t+\beta-\alpha t_i)} - 1] d\mathcal{G}(s).$$

On obtient donc à la limite, d'après la définition de l'intégrale de Riemann,

$$\log \varphi(\alpha, \beta, t) = -\frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t [\alpha(t-\tau) + \beta]^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{G}(s) \left[e^{is(\alpha t+\beta)} \int_0^t e^{-is\tau} d\tau - t \right] \\ = -\frac{1}{2} \sigma^2 (\alpha^2 t^3 + 3\alpha\beta t^2 + 3\beta^2 t) + \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{is\beta} \frac{e^{is\alpha t} - 1}{is\alpha} - t \right] d\mathcal{G}(s).$$

La fonction $\varphi(\alpha, \beta, t)$ est la fonction caractéristique de $U(t)$ et de :

$$X(t) = \int_0^t U(s) ds.$$

Il faut maintenant démontrer que ce symbole représente aussi bien une intégrale en moyenne quadratique, c'est-à-dire que $X(t)$ admet $U(t)$ pour dérivée en moyenne quadratique. Il suffit pour cela de former la covariance $\Gamma(t_1, t_2)$ de $X(t)$ et de vérifier que la dérivée seconde généralisée existe et est identique à la covariance de $U(t)$.

Pour simplifier les calculs, on peut remarquer que $U(t)$ se met sous la forme :

$$U(t) = \int_0^t dV(s),$$

les variables aléatoires $dV(s)$ et $dV(s')$ étant indépendantes si $s' \neq s$. On voit alors que :

$$X(t) = \int_0^t (t-s) dV(s).$$

Le logarithme de la fonction caractéristique de $dV(s)$ est $\log \varphi_0(\alpha, ds)$.

Il en résulte que la partie principale de $[\overline{dV(s)}]^2$ est de la forme $A ds$, A étant un nombre qui se construit facilement à partir de σ et de $\mathcal{G}$.

La covariance de $U(t)$ s'écrit, pour $\tau > 0$,

$$\overline{U(t) U(t + \tau)} = \iint \overline{dV(s) dV(s')},$$

l'intégrale étant étendue au rectangle représenté ci-dessous (fig. 2).

Or $\overline{dV(s) dV(s')} = 0$, sauf si $s = s'$. Donc :

$$\overline{U(t) U(t + \tau)} = \int_0^t \overline{[dV(s)]^2} = A \int_0^t ds = At.$$

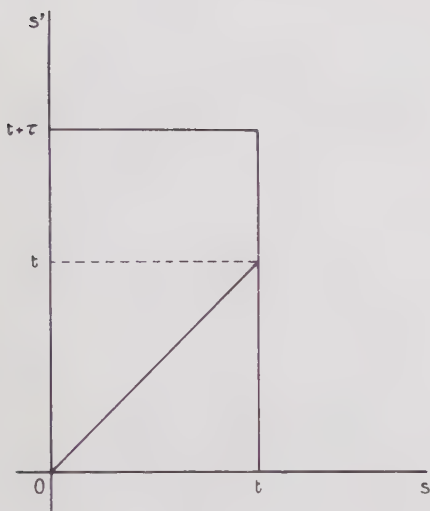


Fig. 2

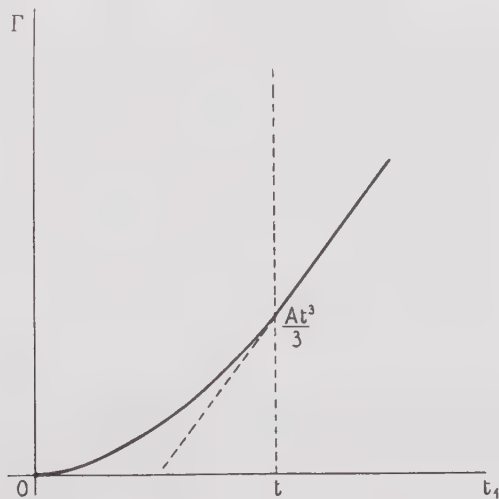


Fig. 3

De même :

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t + \tau) &= \overline{X(t) X(t + \tau)} = \iint (t - s)(t + \tau - s') \overline{dV(s) dV(s')} \\ &= A \int_0^t (t - s)(t + \tau - s) ds = A \frac{t^3}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\tau}{t}\right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t_1) &= A \left(\frac{1}{2} t^2 t_1 - \frac{t_1^3}{6} \right), & \text{si } t_1 \geq t, \\ &= A \left(\frac{1}{2} t t_1^2 - \frac{t_1^3}{6} \right), & \text{si } t_1 \leq t. \end{aligned}$$

En fonction de t_1 , par exemple, Γ est une courbe continue admettant une dérivée continue (fig. 3).

La dérivée seconde généralisée de Γ est la limite, quand h et k tendent vers 0, $k > h$, de :

$$\frac{A}{3} \left[(t + h)^3 + \frac{3}{2} (k - h)(t + h)^2 - t^3 - \frac{3}{2} h t^2 - t^3 - \frac{3}{2} k t^2 + t^3 \right] = A \left[t + \frac{h}{2} \left(1 - \frac{h}{k} \right) \right].$$

Comme $h < k$, cette limite est égale à $At = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial t_1}$. $X(t)$ est donc bien dérivable en moyenne quadratique, et l'on vérifie que $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial t_1}$ est bien la covariance de $U(t)$. On vérifie d'autre part sans difficultés que $U(t)$ n'est pas dérivable (fig. 4).

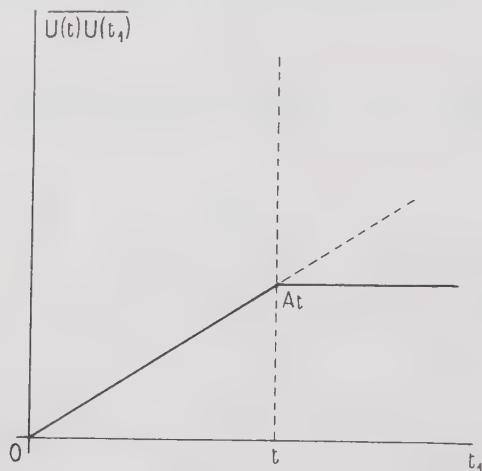


Fig. 4

13. — Équation fonctionnelle vérifiée par $\varphi(\alpha, \beta, t)$. Équation de transfert.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} [e^{is(\alpha t + \beta)} - 1] d\mathcal{G}(s) - \frac{1}{2} \sigma^2 (\alpha^2 t^2 + 2\alpha\beta t + \beta^2); \\ \frac{1}{\varphi} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\beta} (e^{is\alpha t} - 1) d\mathcal{G}(s) - \frac{1}{2} \sigma^2 (2\alpha\beta t + \alpha^2 t^2); \\ \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) &= -\frac{1}{2} \sigma^2 \beta^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{is\beta} - 1) d\mathcal{G}(s). \end{aligned}$$

L'équation cherchée est donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -\frac{1}{2} \sigma^2 \beta^2 \varphi + \varphi \int_{-\infty}^{\infty} (e^{is\beta} - 1) d\mathcal{G}(s).$$

En général, la loi de probabilité de $X(t)$, $U(t)$ n'admet pas de densité. On doit donc se contenter de chercher la relation qui donne la variation de la moyenne d'une fonction bornée $G(x, u)$.

Il est commode de passer par l'intermédiaire *formel* du développement en série de $e^{is\beta}$, qui n'est strictement valable que si la fonction $\mathcal{G}(s)$ est définie par ses moments :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{is\beta} - 1) d\mathcal{G}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\beta)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} s^n d\mathcal{G}(s).$$

On remplace $i\beta$ par $\frac{\partial}{\partial u}$. On trouve ainsi :

$$\frac{d}{dt} \overline{G} = \overline{U \frac{\partial G}{\partial X}} + \overline{\int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{G}(s) \sum_{n=1}^{\infty} s^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} G} + \frac{1}{2} \sigma^2 \overline{\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}},$$

ou :

$$(18) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \overline{G} = \overline{U \frac{\partial G}{\partial X}} + \overline{\int_{-\infty}^{\infty} [G(X, U+s) - G(X, U)] d\mathcal{G}(s)} + \frac{1}{2} \sigma^2 \overline{\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}}},$$

et cette formule est valable pour toutes les fonctions G possibles, sans restriction sur l'existence de leurs moments. Pour le démontrer, il suffit de voir qu'elle entraîne l'équation relative à φ , puisque la loi de probabilité de X, U est bien définie par sa fonction caractéristique. Or, si l'on prend $G = e^{i(\alpha x + \beta u)}$, on trouve :

$$G(x, u+s) - G(x, u) = e^{i(\alpha x + \beta u)} (e^{i\beta s} - 1).$$

Le terme en litige s'écrit bien :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{G}(s) (e^{i\beta s} - 1) e^{i(\alpha x + \beta u)} = \varphi \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\beta s} - 1) d\mathcal{G}(s).$$

On a ici formellement :

$$A = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{s \frac{\partial}{\partial u}} - 1) d\mathcal{G}(s).$$

Équation de transfert. — Si la loi de probabilité de X et U est absolument continue, on peut associer à $X(t)$ des équations hydrodynamiques. Supposons, pour fixer les idées que $\log \varphi_0(\alpha, t)$ se réduise à $-\frac{1}{2} \sigma^2 t \alpha^2$, et A à $\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2}$. L'équation de transfert s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \overline{G} + \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{Gu} = \rho \left[\frac{\partial G}{\partial t} + u \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right].$$

ρ est d'ailleurs connu : c'est la densité de probabilité d'une loi de Gauss ayant pour écart type $\frac{\sigma^2 t^3}{3}$,

$$\rho(x, t) = \frac{\sqrt{3}}{\sigma \sqrt{2\pi} t^3} e^{-\frac{3x^2}{2t^3\sigma^2}}.$$

De même $f(x, u, t)$ a pour fonction caractéristique :

$$e^{-\frac{\sigma^2}{6}(\alpha^2 t^3 + 3\alpha\beta t^2 + 3\beta^2 t)}.$$

Donc :

$$f(x, u, t) = \frac{\sqrt{3}}{\pi \sigma^2 t^2} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{6x^2}{t^2} - \frac{6xu}{t} + \frac{2u^2}{t} \right)}.$$

La densité de probabilité liée de U pour $X = x$ est égale à :

$$\frac{f}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{2}{t^2} \left(u - \frac{3x}{2t} \right)^2}.$$

Les premiers moments liés qui lui correspondent ont pour expressions :

$$\overline{u} = \frac{3x}{2t}, \quad \overline{u'^2} = \frac{\sigma \sqrt{t}}{2}.$$

D'autre part :

$$Au = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} u = 0.$$

Au point $X(t)$, on peut donc associer un fluide dont voici les propriétés : ce fluide n'est soumis à aucune force extérieure. Sa vitesse en chaque point est inversement proportionnelle au temps. L'équation différentielle du mouvement des particules étant :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3x}{2t},$$

la position des particules à l'instant t a pour expression :

$$x = Ct^{\frac{3}{2}},$$

C étant une constante.

Pour $t = 0$, ce fluide est rassemblé en un point : il « passe par un trou ». On peut se faire une image de son mouvement en considérant un fluide à deux dimensions tel que la composante de sa vitesse suivant l'axe des y soit une constante v . On a alors :

$$x = Ct^{\frac{3}{2}}, \quad y = vt.$$

Les filets fluides partent tous de l'origine et s'épanouissent en fonction du temps. La densité ρ du fluide, à un instant t donné, est une fonction rapidement décroissante de $|x|$. Lorsque $t \rightarrow 0$, elle tend vers 0 en tout point sauf au point $x = 0$, car toute la masse fluide se concentre en un seul point où la densité devient infinie.

La pression du fluide est égale à :

$$\rho \overline{u'^2} = \frac{\sqrt{3}}{2t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3x^2}{2t^2\sigma^2}}.$$

Sa température est proportionnelle à $\overline{u'^2}$, c'est-à-dire à $\sqrt{t}$.

Naturellement, ce fluide donne du point $X(t)$ une image *moyenne*. Mais, par l'introduction de la densité et de la pression, cette image contient une partie au moins des propriétés stochastiques de $X(t)$.

14. — TROISIÈME EXEMPLE. — **Remarques préliminaires sur les processus de Markoff** [11-40].

Supposons que la vitesse $U(t)$ du point aléatoire constitue un *processus de Markoff continu*, possédant une densité de probabilité.

Soit $f(x, u, t)$ la densité de probabilité de $X(t)$, $U(t)$, et $p(u, v, t, t_1)$ la densité de probabilité liée de $U(t_1)$, lorsque $U(t) = u$ (*probabilité de passage*).

KOLMOGOROFF a étudié les propriétés de la fonction p , en partant des hypothèses suivantes :

I. — p satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$p(u, v, t, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u, s, t, t') p(s, v, t', t_1) ds, \quad t < t' < t_1$$

(équation de Chapman-Kolmogoroff), caractéristique des processus de Markoff.

II. — Les moyennes liées de $U(t + \tau) - U(t)$ et de $[\overline{U(t + \tau) - U(t)}]^2$ pour $U(t) = u$, sont des infiniment petits du 1^{er} ordre par rapport à τ . Autrement dit, on peut poser :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (v - u) p(u, v, t, t + \tau) dv = a(u, t),$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (v - u)^2 p(u, v, t, t + \tau) dv = b(u, t).$$

III. — p satisfait à une « condition de Lindeberg » suivant laquelle les grandes valeurs de l'accroissement $U(t + \tau) - U(t)$ apportent une contribution négligeable à la formation de la moyenne limite $b(u, t)$. Autrement dit, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ donné,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{|v-u| > \varepsilon} (v - u)^2 p(u, v, t, t + \tau) dv = 0.$$

Moyennant ces hypothèses, KOLMOGOROFF a démontré que la fonction p satisfait aux deux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a(u, t) \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{1}{2} b(u, t) \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} (ap) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (bp) = 0,$$

a et b désignant dans la seconde équation $a(v, t)$, $b(v, t)$.

On en déduit facilement que la densité de probabilité $\rho_1(u, t)$ de $U(t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u} (a \rho_1) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (b \rho_1).$$

Bien entendu, ces équations ne sont des équations aux dérivées partielles que dans la mesure où les fonctions a et b sont connues d'avance. C'est la forme particulière à cet exemple d'une remarque générale qui a déjà été faite plusieurs fois.

Nous nous proposons de montrer d'abord que l'équation relative à $\rho_1(u, t)$ résulte des conditions II et III, sans que la condition I caractéristique des processus de Markoff ait à intervenir. Nous étendrons ensuite la méthode et les résultats au système de fonctions $X(t)$, $U(t)$, pour lui appliquer enfin les méthodes générales de la théorie du transfert.

THÉORÈME. — Si $g(u)$ est une fonction bornée admettant une dérivée seconde continue et bornée, et si les conditions II et III sont satisfaites, on a :

$$\frac{d}{dt} \bar{g} = \overline{ag'}(U) + \frac{1}{2} \overline{bg''}(U).$$

Appliquons en effet la formule de Taylor à $g(u)$:

$$g(v) - g(u) = (v - u) g'(u) + \frac{1}{2} (v - u)^2 g''_1,$$

avec :

$$g''_1 = g''[u + \theta(v - u)], \quad 0 < \theta < 1.$$

Multiplions membre à membre par $\frac{1}{\tau} p(u, v, t, t + \tau)$ et intégrons par rapport à v . Le premier membre s'écrit :

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} [g(v) - g(u)] p(u, v, t, t + \tau) dv = \frac{1}{\tau} [\overline{g[U(t + \tau)]} - g(u)],$$

où les moyennes sont des moyennes liées pour $U(t) = u$.

Le second membre s'écrit :

$$g'(u) \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (v - u) p dv + \frac{1}{\tau} \int_{|v-u| < \varepsilon} g''_1 (v - u)^2 p dv + \frac{1}{\tau} \int_{|v-u| > \varepsilon} g''_1 (v - u)^2 p dv.$$

Cherchons-en la limite lorsque τ tend vers zéro.

Le premier terme tend vers $g'(u) a(u, t)$.

Si M est une borne supérieure de $|g''(u)|$, le module du troisième terme est inférieur à :

$$M \frac{1}{\tau} \int_{|v-u| > \varepsilon} (v - u)^2 p dv.$$

Il tend vers 0, d'après la condition III.

On peut enfin appliquer le théorème de la moyenne au second terme. Il s'écrit :

$$g''[u + \theta(v_1 - u)] \frac{1}{\tau} \int_{|v-u| < \varepsilon} (v - u)^2 p dv, \quad |v_1 - u| < \varepsilon, \quad 0 < \theta < 1.$$

Comme par hypothèse, $g''(u)$ est une fonction continue de u , on peut choisir ε assez petit pour que $g''[u + \theta(v_1 - u)]$ soit aussi voisin qu'on le désire de $g''(u)$. Quand $\tau \rightarrow 0$, le terme en question tend vers une limite qui est arbitrairement voisine de :

$$g''(u) \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{|v-u| < \varepsilon} (v-u)^2 p \, dv.$$

Comme :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{|v-u| > \varepsilon} (v-u)^2 p \, dv = 0,$$

cette limite est elle-même arbitrairement voisine de :

$$g''(u) \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (v-u)^2 p \, dv = b(u, t) g''(u).$$

On a donc finalement :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} [g(v) - g(u)] p(u, v, t, t + \tau) \, dv = ag' + \frac{1}{2} bg''.$$

Prenons maintenant la moyenne par rapport à u des deux membres. On voit que :

$$\frac{d}{dt} \bar{g} = \overline{ag'} + \frac{1}{2} \overline{bg''}.$$

Corollaire :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u} (a \varphi_1) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (b \varphi_1).$$

Pour démontrer cette formule, il suffit d'expliciter la relation relative à g :

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \varphi_1(u, t) \, du = \int_{-\infty}^{\infty} a(u, t) g'(u) \varphi_1(u, t) \, du + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(u, t) g''(u) \varphi_1(u, t) \, du,$$

et de procéder au second membre à des intégrations par parties, en supposant que $g(u)$ et $g'(u)$ s'annulent à l'infini. On applique ensuite le lemme fondamental du calcul des variations, et l'on trouve la relation annoncée.

15. — Étude du point aléatoire admettant pour vitesse une fonction aléatoire $U(t)$ qui satisfait aux conditions de Kolmogoroff. Théorèmes fondamentaux [11].

Nous désignerons maintenant par $p_1(x, y, u, v, t, t + \tau)$ la densité de probabilité liée de $X(t + \tau)$, $U(t + \tau)$, lorsque $X(t) = x$, $U(t) = u$, pour ne pas la confondre avec la fonction $p(u, v, t, t + \tau)$ employée précédemment.

Pour simplifier les notations, nous emploierons le symbolisme suivant : nous représenterons les densités de probabilité par une parenthèse, les variables libres étant à gauche, et séparées par une barre verticale des variables liées ou du temps, qui jouent le rôle de paramètres. Il sera même permis de ne pas écrire les paramètres temps, lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre.

Nous écrirons par exemple :

$$p_1(x, y, u, v, t, t + \tau) = (y, v | x, u), \quad p(u, v, t, t + \tau) = (v | u),$$

$(v | u, t, t + \tau)$ désignera la densité de probabilité liée de $U(t + \tau)$ pour $U(t) = u$.

Hypothèses. — 1° Toutes les densités de probabilité sont supposées bornées supérieurement, et bornées inférieurement, pour les valeurs finies des variables, par un nombre positif;

2° $U(t)$ satisfait à la condition III de Kolmogoroff-Lindeberg;

$$3^\circ \quad \lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau} \int (v - u) p_1(x, y, u, v, t, t + \tau) dy dv = \alpha(x, u, t),$$

$$\lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau} \int (v - u)^2 p_1(x, y, u, v, t, t + \tau) dy dv = b(x, u, t),$$

les intégrales étant étendues à tout le plan des u, v .

Lemme 1. — Si $X(t)$ est dérivable en moyenne quadratique, la moyenne liée de $\frac{1}{\tau} [X(t + \tau) - X(t)]^2$ pour $X(t) = x, U(t) = u$ tend vers 0 avec τ .

Cette moyenne est en effet égale à :

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 (y | x, u) dy,$$

où $(y | x, u)$ est la densité de probabilité liée de $X(t + \tau)$ pour $X(t) = x, U(t) = u$.

On peut l'écrire, d'après le théorème des probabilités composées,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 \frac{(x, y, u)}{(x, u)} dy &= \frac{1}{(x, u)} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 (x, y) (u | x, y) dy \\ &= \frac{(x)}{(x, u)} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 (y | x) (u | x, y) dy. \end{aligned}$$

Les densités de probabilité étant par hypothèse bornées inférieurement et supérieurement, il existe un nombre M tel que, pour toutes valeurs finies de x, u ,

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 (y | x, u) dy < M \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 (y | x) dy.$$

Or on sait que $\frac{1}{\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 (y|x) dy$ a une limite finie. L'intégrale du second membre tend donc vers 0.

Lemme 2. — Si $X(t)$ est dérivable en moyenne quadratique, la moyenne liée de :

$$\frac{1}{\tau} [X(t + \tau) - X(t)] [U(t + \tau) - U(t)],$$

pour $X(t) = x$, $U(t) = u$, tend vers 0 avec τ .

Cette moyenne est en effet inférieure au produit des racines carrées des moyennes de :

$$\frac{1}{\tau} [X(t + \tau) - X(t)]^2,$$

et de :

$$\frac{1}{\tau} [U(t + \tau) - U(t)]^2.$$

La première tend vers 0 d'après le lemme 1, et la seconde a une limite finie d'après l'hypothèse 3.

Lemme 3. — L'intégrale :

$$\frac{1}{\tau} \int_{|v-u|>\varepsilon} (v - u)^2 p_1(x, y, u, v, t, t + \tau) dy dv,$$

étendue au domaine du plan des y, v pour lequel $|v - u| > \varepsilon$, tend vers 0 avec τ .

En effet, d'après le théorème des probabilités composées, cette intégrale est égale à :

$$\frac{1}{(x, u)} \frac{1}{\tau} \int_{|v-u|>\varepsilon} (v - u)^2 (x, y, u, v) dy dv,$$

et, d'après le théorème des probabilités totales, à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x, u)} \frac{1}{\tau} \int_{|v-u|>\varepsilon} (v - u)^2 (x, u, v) dv &= \frac{1}{(x, u)} \frac{1}{\tau} \int_{|v-u|>\varepsilon} (v - u)^2 (u, v) (x|u, v) dv \\ &= \frac{(u)}{(x, u)} \frac{1}{\tau} \int_{|v-u|>\varepsilon} (v - u)^2 (v|u) (x|u, v) dv. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse 1, il existe un nombre M tel que cette dernière intégrale soit inférieure à :

$$M \frac{1}{\tau} \int_{|v-u|>\varepsilon} (v - u)^2 (v|u) dv,$$

quantité qui tend vers 0 d'après la condition III relative à $U(t)$.

THÉOREME. — Moyennant les hypothèses énoncées ci-dessus, la moyenne d'une fonction bornée $G(x, u)$ de $X(t)$, $U(t)$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$(19) \quad \frac{d}{dt} \overline{G} = \overline{U \frac{\partial G}{\partial X}} + a \overline{\frac{\partial G}{\partial U}} + \frac{1}{2} b \overline{\frac{\partial^2 G}{\partial U^2}}.$$

Nous supposons que G admet des dérivées partielles du second ordre continues et bornées.

Nous savons (§ 4) que :

$$\frac{d}{dt} \overline{G} = \overline{U \frac{\partial G}{\partial X}} + \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ [U(t + \tau) - U(t)] \frac{\partial G}{\partial U} + \frac{1}{2} [U(t + \tau) - U(t)]^2 \frac{\partial^2 G}{\partial U^2} \right\},$$

avec :

$$G_1 = G[x + \theta(y - x), u + \theta(v - u)].$$

Il s'agit de trouver la limite qui figure au second membre.

On voit d'abord que :

$$\lim_{\tau} \frac{1}{\tau} [U(t + \tau) - U(t)] \frac{\partial G}{\partial U} = \overline{\frac{\partial G}{\partial U}} \lim_{\tau} \frac{1}{\tau} [U(t + \tau) - U(t)] = a \overline{\frac{\partial G}{\partial U}}.$$

Pour calculer la dernière intégrale, on sépare le domaine d'intégration en trois parties :

$$\int_{|v-u| > \varepsilon} + \int_{\substack{|y-x| > \varepsilon \\ |v-u| < \varepsilon}} + \int_{\substack{|y-x| < \varepsilon \\ |v-u| < \varepsilon}},$$

que l'on étudie séparément.

Première intégrale. — D'après le lemme 3, la moyenne, liée pour $X = x$, $U = u$,

$$\frac{1}{\tau} \int_{|v-u| > \varepsilon} (v - u)^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial u^2} p_1 dy dv,$$

tend vers 0 avec τ . Cette intégrale est en effet inférieure en module à :

$$M \frac{1}{\tau} \int_{|v-u| > \varepsilon} (v - u)^2 p_1 dy dv,$$

M étant une borne supérieure de $\left| \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right|$. La moyenne absolue tend aussi vers 0 avec τ .

Deuxième intégrale. — Laissons d'abord x et u fixes, et occupons-nous des moyennes liées pour les valeurs ainsi fixées de X , U .

Puisque $|v - u| < \varepsilon$,

$$\frac{1}{\tau} \int_{\substack{|y-x| > \varepsilon \\ |v-u| < \varepsilon}} (v - u)^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial u^2} p_1 dy dv < M \varepsilon^2 \frac{1}{\tau} \int_{\substack{|y-x| > \varepsilon \\ |v-u| < \varepsilon}} p_1(x, y, u, v, t, t + \tau) dy dv.$$

Cette intégrale, que l'on majore en étendant le domaine d'intégration à toutes, les valeurs de v , est inférieure à :

$$\begin{aligned} M \varepsilon^2 \frac{1}{\tau} \int_{|y-x|>\varepsilon} p_1 dy dv &= \frac{M \varepsilon^2}{(x, u)} \frac{1}{\tau} \int_{|y-x|>\varepsilon} (x, y, u, v) dy dv \\ &= \frac{M \varepsilon^2}{(x, u)} \frac{1}{\tau} \int_{|y-x|>\varepsilon} (x, y, u) dy = M \varepsilon^2 \frac{1}{\tau} \int_{|y-x|>\varepsilon} (y|x, u) dy. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est la probabilité liée pour que $|X(t + \tau) - X(t)| > \varepsilon$ sachant que $X(t) = x$, $U(t) = u$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, elle est inférieure à :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \overline{[X(t + \tau) - X(t)]^2},$$

moyenne liée pour $X(t) = x$, $U(t) = u$.

La moyenne liée initiale est donc inférieure à :

$$M \frac{1}{\tau} \overline{[X(t + \tau) - X(t)]^2}.$$

Faisons maintenant décrire à x et u toutes les valeurs possibles, en revenant aux moyennes absolues. L'intégrale initiale est inférieure à la moyenne absolue :

$$M \frac{1}{\tau} \overline{[X(t + \tau) - X(t)]^2} = M \tau \overline{\left[\frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} \right]^2}$$

qui tend vers 0 avec τ , car $X(t)$ est, par hypothèse, dérivable en moyenne quadratique.

Troisième intégrale. — Prenons d'abord des moyennes liées pour $X(t) = x$, $U(t) = u$. D'après la continuité des dérivées secondes de G , on peut choisir ε assez petit pour que $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}$ diffère arbitrairement peu de $\frac{\partial^2 G_1}{\partial u^2}$ dans tout le domaine $|y - x| < \varepsilon$, $|v - u| < \varepsilon$.

La moyenne liée en question diffère donc arbitrairement peu de :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \frac{1}{\tau} \int_{\substack{|y-x|<\varepsilon \\ |v-u|<\varepsilon}} (v - u)^2 p_1 dy dv.$$

Il en est donc de même des moyennes absolues. Il reste à montrer que la moyenne :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \frac{1}{\tau} \int_{\substack{|y-x|<\varepsilon \\ |v-u|<\varepsilon}} (v - u)^2 p_1 dy dv,$$

diffère arbitrairement peu à la limite de :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \frac{1}{\tau} \int (v - u)^2 p_1 dy dv,$$

l'intégrale étant étendue à toutes les valeurs de y, v , c'est-à-dire que, si $\mathcal{O}$ désigne l'ensemble des domaines $|v - u| > \varepsilon$, et $|v - u| < \varepsilon$, $|y - x| > \varepsilon$, l'expression :

$$\overline{\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \frac{1}{\tau} \int_{\mathcal{O}} (v - u)^2 p_1 dy dv},$$

tend vers 0 avec τ . Or cette expression est inférieure à :

$$M \frac{1}{\tau} \int_{\mathcal{O}} (v - u)^2 p_1 dy dv,$$

et la moyenne qui y figure tend vers 0 d'après les raisonnements développés ci-dessus, et qui se transposent immédiatement.

Conclusion. — La troisième intégrale a même limite que :

$$\overline{\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \frac{1}{\tau} \int (v - u)^2 p_1 dy dv},$$

c'est-à-dire $\overline{b \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}}$. On en déduit que :

$$\frac{d}{dt} \overline{G} = \overline{U \frac{\partial G}{\partial X}} + \overline{a \frac{\partial G}{\partial U}} + \frac{1}{2} \overline{b \frac{\partial^2 G}{\partial U^2}},$$

ce qui démontre le théorème.

16. — Conséquences et remarques.

L'opérateur A de la théorie générale est ici égal à :

$$A = a(x, u, t) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2} b(x, u, t) \frac{\partial^2}{\partial u^2}.$$

L'opérateur adjoint est donc :

$$A' = -\frac{\partial}{\partial u} a(x, u, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} b(x, u, t).$$

La fonction caractéristique $\varphi(\alpha, \beta, t)$ et la densité de probabilité $f(x, u, t)$ de $X(t)$, $U(t)$ satisfont donc aux équations fonctionnelles :

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = i \beta a \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \beta}, t \right) \varphi - \frac{1}{2} \beta^2 b \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \beta}, t \right) \varphi, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial u} (af) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (bf). \end{cases}$$

Les quantités a et b s'expriment à l'aide de p_1 . On peut dire que, comme f , elles dérivent de la loi de probabilité de $X(t)$, $X(t + \tau)$, $U(t)$, $U(t + \tau)$. Si, pour des raisons

physiques, a et b sont connues d'avance, les équations précédentes contiennent comme seule inconnue φ ou f . En particulier, f est solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre parabolique par rapport à u .

On peut associer au point aléatoire un fluide suivant la méthode générale du transfert. L'équation de transfert s'écrit ici :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \overline{G} + \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{Gu} = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right] \overline{G}.$$

Le fluide associé est soumis à un champ de force ayant pour densité :

$$\overline{Au} = \overline{a(x, u, t)},$$

ce qui donne une définition mécanique sinon de la fonction $a(x, u, t)$ elle-même, du moins de sa moyenne liée pour $X(t) = x$.

La grandeur $\frac{1}{2} \overline{AC'^2}$ qui figure dans l'équation thermodynamique s'écrit ici :

$$\overline{au'} + \frac{1}{2} \overline{b}.$$

Si par exemple a et b ne dépendent pas de u , mais seulement de x, t , la force extérieure a exactement pour densité la quantité $a(x, t)$, qui se trouve ainsi déterminée, et l'équation thermodynamique détermine de même $b(x, t)$.

Remarque 1. — La théorie qui précède repose sur des hypothèses qui, dans la théorie des processus de Markoff, jouent un rôle en quelque sorte accessoire, le rôle essentiel étant joué par l'équation de Chapman-Kolmogoroff. Elles s'appliquent donc à des fonctions aléatoires plus générales que les chaînes simples. Mais, dans le cas des processus de Markoff, on peut simplifier les raisonnements.

Supposons que $U(t)$ satisfasse aux conditions I, II, III du paragraphe 14, qui signifient que $U(t)$ est un processus de Markoff continu. Nous n'avions pas fait jusqu'ici usage de la condition I. Nous allons montrer que les conditions III du paragraphe 15 en résultent.

Étudions, en effet, la moyenne d'une fonction de $U(t)$, $U(t + \tau)$, une fois choisies les valeurs de $U(t)$ et de $X(t)$. $X(t)$ est la limite de sommes de la forme :

$$\tau_1 U(t_1) + \tau_2 U(t_2) + \dots + \tau_n U(t_n), \quad (t_n = t).$$

Se donner une de ces sommes, c'est se donner un ensemble de valeurs des $U(t_i)$, $U(t)$ compris, pour des valeurs des t_i antérieures à t . Or les moyennes liées que nous étudions ne dépendent que de la valeur de $U(t)$, et non des valeurs antérieures des t_i . Se fixer $X(t)$ et $U(t)$, ce n'est donc pas plus précis que de se fixer seulement $U(t)$. En particulier, les expressions :

$$a = \lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau} \int (v - u) p_1(x, y, u, v, t, t + \tau) dy dv,$$

$$b = \lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau} \int (v - u)^2 p_1(x, y, u, v, t, t + \tau) dy dv,$$

où figurent les moyennes liées de $U(t + \tau) - U(t)$ et $[U(t + \tau) - U(t)]^2$ pour $X(t) = x$, $U(t) = u$ se réduisent aux moyennes liées des mêmes quantités pour un choix préalable de la valeur de $U(t)$ seulement. Ce sont des fonctions de u , t , et non de x . Le lemme 3 se réduit alors à la condition de Lindeberg sur $U(t)$.

Remarque 2. — Les équations fonctionnelles relatives aux fonctions aléatoires à accroissements *indépendants* continues se présentent comme un cas particulier de celles que l'on vient d'étudier pour les processus de Markoff. Il est facile de vérifier que les fonctions aléatoires à accroissements *indépendants* sont bien des processus de Markoff particuliers.

Posons, en effet, $U_i = U(t_i)$. Par hypothèse, les variables aléatoires :

$$U_1, U_2 - U_1, U_3 - U_2, \dots, U_n - U_{n-1},$$

sont indépendantes. La fonction de répartition du système $U_1, U_2, \dots, U_n$ est donc le produit des fonctions de répartition de $U_1, U_2 - U_1, \dots, U_n - U_{n-1}$. Schématiquement :

$$(U_1, U_2, \dots, U_n) = (U_1) (U_2 - U_1) \dots (U_n - U_{n-1}).$$

D'après le théorème des probabilités composées, la loi de probabilité liée de U_n pour des valeurs données de $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ est :

$$(U_n | U_1, U_2, \dots, U_{n-1}) = \frac{(U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, U_n)}{(U_1, U_2, \dots, U_{n-1})} = (U_n - U_{n-1}).$$

Elle ne dépend pas de $U_1, U_2, \dots, U_{n-2}$ mais seulement de U_{n-1} . C'est bien la définition des processus de Markoff.

Avec les notations du paragraphe 12, on a :

$$X(t) = \int_0^t U(s) ds = \int_0^t (t-s) dV(s), \quad U(t) = \int_0^t dV(s).$$

$X(t)$ est la limite de sommes de la forme :

$$\tau_1 U_1 + \dots + \tau_{n-1} U_{n-1} + \tau_n U_n, \quad U_n = U(t).$$

Se fixer $U(t)$ et $X(t)$, c'est aussi se fixer U_n et un système arbitraire de valeurs des $U(t)$ pour des valeurs de $t_i < t$. La moyenne liée d'une fonction de $U(t)$ et de $U(t + \tau)$, une fois choisis $U(t)$ et $X(t)$, se réduit donc à la moyenne liée relativement à $U(t)$ et, dans le cas présent, à la moyenne pure. On a donc :

$$a = \lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau} \overline{[U(t + \tau) - U(t)]} = 0,$$

$$b = \lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau} \overline{[U(t + \tau) - U(t)]^2} = 1.$$

On retrouve bien l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}.$$

17. — Autre exemple de fonction aléatoire [14].

L'intérêt de ce dernier exemple est d'englober les précédents et de les généraliser (au moins jusqu'à un certain point). Il s'agit d'étudier les fonctions aléatoires de la forme :

$$X(t) = \int_0^t K(t, s) dV(s),$$

$V(s)$ étant une fonction aléatoire à accroissements orthogonaux, en général complexe.

Nous supposons que $\bar{V} = 0$. Nous posons :

$$|dV(\bar{s})|^2 = \theta(s) ds.$$

$K(t, s)$ est une fonction complexe bornée, intégrable par rapport à s , deux fois dérivable par rapport à t .

En même temps que $X(t)$, nous étudierons les fonctions :

$$X'(t) = \int_0^t K'_t(t, s) dV(s), \quad X''(t) = \int_0^t K''_{t^2}(t, s) dV(s),$$

qui ne représentent pas nécessairement des dérivées.

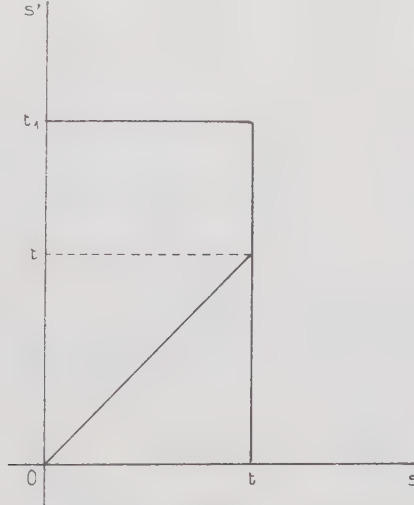


Fig. 5

Calcul de la covariance Γ de $X(t)$ (fig. 5). — Le calcul, en tous points analogue à celui qui a été développé au paragraphe 12, montre que :

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t_1) &= \iint K(t, s) K^*(t_1, s') \overline{dV(s)} dV^*(s'), \\ &= \int_0^t K(t, s) K^*(t_1, s) \theta(s) ds, \end{aligned}$$

cela si $t_1 \geq t$.

THÉORÈME. — *Pour que $X(t)$ soit dérivable en moyenne quadratique, il faut et il suffit que $X(t, t)$ soit identiquement nul. Dans ce cas, $X'(t)$ est la dérivée de $X(t)$.*

Calculons, en effet, la dérivée seconde généralisée de $\Gamma(t, t_1)$, pour $t_1 = t$. Si $k \geq h$, il faut chercher la limite, lorsque $k \rightarrow 0$, de :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{hk} [\Gamma(t+h, t+k) - \Gamma(t, t+k) - \Gamma(t+h, t) + \Gamma(t_1, t)] \\ &= \frac{1}{hk} \left\{ \int_0^{t+h} K(t+h, s) K^*(t+k, s) \theta(s) ds - \int_0^t K(t, s) K^*(t+h, s) \theta(s) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t K(t+h, s) K^*(t, s) \theta(s) ds + \int_0^t K(t, s) K^*(t, s) \theta(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Si l'on décompose la première intégrale en $\int_0^t + \int_t^{t+h}$, on se trouve en présence de quatre intégrales prises de 0 à t et d'une intégrale $\int_t^{t+h}$. Les termes relatifs aux intégrales $\int_0^t$ fournissent une limite, égale à la dérivée seconde ordinaire $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial t_1}$, prise pour $t_1 = t$. Il reste le terme :

$$\frac{1}{hk} \int_t^{t+h} K(t+h, s) K^*(t+k, s) \theta(s) ds.$$

L'intégrale est un infiniment petit du premier ordre par rapport à h . Elle s'écrit, d'après le théorème de la moyenne :

$$hK(t+h, t+\mu h) K^*(t+k, t+\mu h) \theta(t+\mu h), \quad 0 < \mu < 1.$$

Le quotient par h de cette quantité tend vers $|K(t, t)|^2 \theta(t)$, et le quotient par hk n'a pas de limite finie, sauf si $K(t, t)$ est nul. Telle est donc la condition de dérivabilité. On en déduit immédiatement que $X'(t)$ représente bien la dérivée en moyenne quadratique de $X(t)$.

Si, par exemple, $K(t, s) = t - s$ (exemple du § 12), on voit que $X(t)$ est dérivable, alors que, si $K(t, s) = 1$, $X(t)$ ne peut l'être.

THÉORÈME. — *Pour que $X(t)$ constitue un processus de Markoff, il faut et il suffit que $K(t, s)$ soit le produit d'une fonction de t par une fonction de s .*

Si, en effet, $X(t)$ constitue un processus de Markoff, c'est la solution d'une équation différentielle stochastique de la forme :

$$dX(t) = X(t) dA(t) + B(t) dV(t),$$

le caractère linéaire de cette équation traduisant le fait que $X(t)$ est une combinaison linéaire d'accroissements. $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions non aléatoires, dont il faut étudier la compatibilité avec l'existence de la fonction $K(t, s)$.

En changeant les notations, on démontre facilement que la solution de cette équation différentielle qui s'annule pour $t = 0$ s'écrit :

$$X(t) = \int_0^t a(t) b(s) dV(s).$$

Elle est de la forme proposée si :

$$K(t, s) = a(t) b(s).$$

Remarques. — On vérifie d'abord que, si $X(t)$ constitue un processus de Markoff, $X(t)$ ne peut être en même temps dérivable.

Posons maintenant :

$$\Delta = X(t+h) - X(t),$$

et calculons la partie principale de :

$$\overline{\Delta^2} = \overline{|X(t+h) - X(t)|^2},$$

par rapport à h :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta^2} &= \Gamma(t+h, t+h) + \Gamma(t, t) - \Gamma(t, t+h) - \Gamma(t+h, t) \\ &= \int_t^{t+h} K(t+h, s) K^*(t+h, s) \theta(s) ds + h^2 \int_0^t K'_t(t, s) K'^*_t(t, s) \theta(s) ds, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant au moins d'ordre 3.

Si $K(t, t) \neq 0$, l'intégrale $\int_t^{t+h}$ a pour partie principale :

$$h |K(t, t)|^2 \theta(t),$$

et $\overline{\Delta^2}$ est du premier ordre par rapport à h .

Si $K(t, t) = 0$, $\overline{\Delta^2}$ est du second ordre, comme on pouvait le prévoir, puisque alors $X(t)$ est dérivable en moyenne quadratique.

Si la moyenne *liée* de Δ^2 , pour une valeur fixée de $X(t)$, possède un ordre infinitésimal par rapport à h , cet ordre est le même que celui de la moyenne pure $\overline{|X(t+h) - X(t)|^2}$. Il est donc en général égal à 1, sauf si $X(t)$ est dérivable. Autrement dit, si $K(t, t) \neq 0$, les conditions II de Kolmogoroff (§ 14) sont satisfaites sans dégénérescence. Or la condition $K(t, t) \neq 0$ n'entraîne pas nécessairement que $X(t)$ soit un processus de Markoff. Si $K(t, s)$ n'est pas de la forme $a(t) b(s)$, on voit que $X(t)$ satisfait aux conditions II de Kolmogoroff, *mais non à la condition I* (équation de Chapman-Kolmogoroff).

18. — Autre exemple (suite).

Fonction caractéristique de $X(t)$ et de $X'(t)$ et équations d'évolution. — Nous supposons maintenant que la fonction aléatoire $V(s)$ soit à *accroissements indépendants*, et non plus seulement orthogonaux. Nous nous proposons de former la fonction caractéristique $\varphi(\alpha, \beta, t)$ de $X(t)$ et de $X'(t)$, sans que $X'(t)$ représente nécessairement une dérivée de $X(t)$.

Nous pouvons désigner par :

$$\lambda(\mu, s) ds = \log e^{\overline{i\mu dV(s)}},$$

le logarithme de la fonction caractéristique de $dV(s)$. Notons que $\lambda(0, s) = 0$ quel que soit s .

$$\varphi(\alpha, \beta, t) = e^{\overline{i(\alpha X + \beta X')}}$$

est le produit de termes indépendants

$$e^{\overline{i[\alpha K(t, s) + \beta K'_t(t, s)]dV(s)}}.$$

Donc :

$$\log \varphi(\alpha, \beta, t) = \int_0^t \lambda [\alpha K(t, s) + \beta K'_t(t, s), s] ds.$$

φ vérifie une équation aux dérivées partielles du premier ordre. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \lambda [\alpha K(t, t) + \beta K'_t(t, t), t] \\ &\quad + \int_0^t [\alpha K'_t(t, s) + \beta K''_{t^2}(t, s)] \frac{\partial}{\partial \mu} \lambda [\alpha K(t, s) + \beta K'_t(t, s), s] ds, \\ \frac{1}{\varphi} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} &= \alpha \int_0^t K'_t(t, s) \frac{\partial}{\partial \mu} \lambda [\alpha K(t, s) + \beta K'_t(t, s), s] ds. \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \varphi \lambda [\alpha K(t, t) + \beta K'_t(t, t), t] + \varphi \beta \int_0^t K''_{t^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \lambda [\alpha K + \beta K'_t, s] ds.$$

Dans cette équation, K, K'_t, K''_{t^2} désignent $K(t, s), K'_t(t, s), K''_{t^2}(t, s)$.

On montre alors facilement qu'il existe un opérateur A tel que, si $G(X, X')$ est une fonction bornée,

$$\frac{d}{dt} \overline{G} = X' \frac{\partial \overline{G}}{\partial X} + A \overline{G}.$$

Pour préciser la forme de l'opérateur A , nous allons supposer, quoique ce ne soit pas indispensable, que le couple X, X' admet une densité de probabilité $f(x, x')$. f est solution de l'équation fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + x' \frac{\partial f}{\partial x'} - \lambda \left[-\frac{1}{i} K(t, t) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} K'_t(t, t) \frac{\partial}{\partial x'}, t \right] f \\ - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^t K''_{t^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \lambda \left[-\frac{1}{i} K \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} K'_t \frac{\partial}{\partial x'}, s \right] ds f. \end{aligned}$$

Pour simplifier l'apparence de cette équation, calculons la moyenne liée γ de la fonction $X''(t)$, connaissant les valeurs x et x' des variables aléatoires X et X' . Désignons par la notation (x, x', x'') la densité de probabilité du système X, X', X'' . On a :

$$\gamma f := \int x''(x, x', x'') dx''.$$

Multiplications par $e^{i(\alpha x + \beta x')}$ et intégrons dans l'espace des x, x' :

$$\int_{\gamma} f e^{i(\alpha x + \beta x')} dx dx' = \int x'' e^{i(\alpha x + \beta x')} (x, x', x'') dx dx' dx''.$$

Introduisons la fonction caractéristique $\Phi(\alpha, \beta, \varepsilon)$ de x, x', x'' :

$$\Phi(\alpha, \beta, \varepsilon) = \int e^{i(\alpha x + \beta x' + \varepsilon x'')} (x, x', x'') dx dx' dx''.$$

Dérivons Φ par rapport à ε , puis faisons $\varepsilon = 0$:

$$\frac{1}{i} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \int x'' e^{i(\alpha x + \beta x')} (x, x', x'') dx dx' dx''.$$

On voit donc que :

$$\int_{\gamma} f e^{i(\alpha x + \beta x')} dx dx' = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}.$$

Or, en opérant comme ci-dessus, on trouve que :

$$\log \Phi(\alpha, \beta, \varepsilon) = \int_0^t \lambda [\alpha K + \beta K'_t + \varepsilon K''_{t^2}, s] ds.$$

Il en résulte que :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = \int_0^t K''_{t^2} \lambda [\alpha K + \beta K'_t + \varepsilon K''_{t^2}, s] ds.$$

Si l'on fait $\varepsilon = 0$, Φ devient :

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int e^{i(\alpha x + \beta x')} f dx dx'.$$

On arrive ainsi au résultat suivant :

$$\int_{\gamma} f e^{i(\alpha x + \beta x')} dx dx' = \frac{1}{i} \int e^{i(\alpha x + \beta x')} f dx dx' \int_0^t K''_{t^2} \lambda [\alpha K + \beta K'_t, s] ds.$$

Il reste à prendre les transformés de Fourier. Le membre de gauche est transformé de γf , et celui de droite est transformé de :

$$\frac{1}{i} \int_0^t K''_{t^2} \lambda \left[-\frac{1}{i} K \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} K'_t \frac{\partial}{\partial x'}, s \right] ds f.$$

On voit finalement que :

$$(21) \quad \gamma f = \frac{1}{i} \int_0^t K''_{t^2} \lambda \left[-\frac{1}{i} K \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} K'_t \frac{\partial}{\partial x'}, s \right] ds f.$$

On peut ainsi écrire l'équation fonctionnelle vérifiée par f sous la forme définitive que voici :

$$(22) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + x' \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x'} (\gamma f) = \lambda \left[-\frac{1}{i} K(t, t) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} K'_t(t, t) \frac{\partial}{\partial x'} \right] f.$$

Si $X(t)$ est dérivable, $K(t, t) = 0$, X' est la dérivée de X , et, en désignant par u sa valeur courante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} (\gamma f) = \lambda \left[-\frac{1}{i} K'_t(t, t) \frac{\partial}{\partial u} \right] f.$$

Cette équation est du type prévu au paragraphe 6, dans la mesure où la moyenne liée γ de X'' pour $X = x$, $X' = u$ est considérée comme connue.

Si en particulier $X(t)$ est deux fois dérivable, $K'_t(t, t) = 0$, et comme $\lambda(0, t) = 0$, il reste l'équation bien connue (§ 11) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} (\gamma f) = 0.$$

Explicitons cette équation dans le cas simple où $V(s)$ est une variable gaussienne. Prenons pour fixer les idées :

$$\lambda(\mu, s) = -\sigma^2 \mu^2.$$

Le second membre de l'équation (22) se réduit à :

$$\begin{aligned} \sigma^2 \left[K(t, t) \frac{\partial}{\partial x} + K'_t(t, t) \frac{\partial}{\partial x'} \right]^2 f \\ = \sigma^2 \left[K^2(t, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 K(t, t) K'_t(t, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'} + K'^2_t(t, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \right]. \end{aligned}$$

Si $X(t)$ est dérivable,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial u} (\gamma f) + \sigma^2 K'^2_t(t, t) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}.$$

γ est d'ailleurs donné par l'équation :

$$\gamma f = \frac{\sigma^2}{i} \int_0^t K''_{t's}(t, s) ds \left[K^2(t, s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 K(t, s) K'_t(t, s) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} + K'^2_t(t, s) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right].$$

Si $K'_t(t, t)$ n'est pas identiquement nul, $X'(t)$ n'est pas dérivable. Si $K'_t(t, s)$ n'est pas le produit d'une fonction de t par une fonction de s , $X'(t)$ n'est pas un processus de Markoff. La condition I de Kolmogoroff (équation de Chapman-Kolmogoroff) n'est donc pas vérifiée. Les conditions II sont cependant bien vérifiées et l'équation (22) se réduit à une équation aux dérivées partielles du type étudié aux paragraphes 15 et 16. Cet exemple confirme bien que la classe des fonctions aléatoires qui font l'objet de ces derniers paragraphes est plus générale que celle des processus de Markoff.

CHAPITRE III

LA DÉFINITION DES VARIABLES ALÉATOIRES A L'AIDE DES OPÉRATEURS DE L'ESPACE DE HILBERT

19. — Les opérateurs linéaires de l'espace euclidien $\mathcal{R}$ à p dimensions.

Dans ce paragraphe, et les quelques suivants, nous allons rappeler certains résultats classiques, et les énoncer en langage du calcul des probabilités.

Soit $\mathcal{R}$ un espace euclidien, réel ou complexe, à p dimensions. Désignons par $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, les coordonnées d'un point M de $\mathcal{R}$. Faisons subir aux points de $\mathcal{R}$ une transformation linéaire définie par les équations :

$$\xi'_i = \sum_{k=1}^p c_{ik} \xi_k.$$

Si C représente la matrice des c_{ik} , et M' le point transformé de M , on peut écrire symboliquement :

$$(23) \quad M' = CM.$$

Nous dirons aussi que M et M' sont deux *vecteurs* (d'origine O) et C un opérateur linéaire de $\mathcal{R}$. Cherchons les vecteurs M qui sont parallèles à leurs transformés M' . On doit avoir :

$$M' = xM,$$

x étant un nombre inconnu. On doit donc résoudre l'équation :

$$xM = CM,$$

qui se ramène au système linéaire et homogène :

$$x \xi_i = \sum_{k=1}^p c_{ik} \xi_k.$$

Ce système n'a pas en général de solutions qui soient des vecteurs. Il y a exception si x est solution de l'équation algébrique :

$$D(x) = |x \delta_{ik} - c_{ik}| = 0.$$

Désignons par $x_1, x_2, \dots, x_n$ les n racines distinctes de cette équation algébrique ($n \leq p$). On les appelle *valeurs propres* de l'opérateur C de $\mathcal{R}$.

Les solutions de l'équation :

$$x_i M = CM,$$

existent par hypothèse. Elles remplissent un sous-espace $\mathcal{R}_i$ de $\mathcal{R}$ dont le nombre de dimensions est égal à l'ordre de multiplicité de la racine x_i de $D(x)$. C'est un espace à une seule dimension, c'est-à-dire une droite, si x_i est racine simple. On démontre facilement que les sous-espaces $\mathcal{R}_i$ sont deux à deux orthogonaux et remplissent tout l'espace $\mathcal{R}$. Les $\mathcal{R}_i$ sont appelés *sous-espaces propres* de la transformation C .

Nous nous intéressons particulièrement (mais non exclusivement) au cas où les *valeurs propres* x_i sont réelles. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que :

$$c_{ik} = c_{ki}^*,$$

c_{ki}^* désignant l'imaginaire conjugué de c_{ki} . On dit que l'opérateur C est *hermitien*. Cette condition est équivalente à la suivante : quels que soient les vecteurs M_1 et M_2 , on a :

$$(CM_1, M_2) = (M_1, CM_2),$$

la notation (M_1, M_2) représentant le *produit scalaire* des vecteurs M_1 et M_2 .

L'idée fondamentale, celle sur laquelle repose toute l'interprétation statistique de la mécanique quantique, est d'associer à l'opérateur C une *variable aléatoire* X pouvant prendre les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Pour que X constitue une variable aléatoire, il faut maintenant faire correspondre à chacune de ses valeurs possibles une *probabilité*. Pour cela, on introduit un *vecteur unitaire arbitraire* ψ . Si l'on désigne par $P_{\mathcal{R}_i}$ l'opération de projection sur l'espace $\mathcal{R}_i$, et par conséquent par $P_{\mathcal{R}_i}\psi$ la projection du vecteur ψ sur $\mathcal{R}_i$, on pose :

$$(24) \quad p_i = \|P_{\mathcal{R}_i}\psi\|^2,$$

le symbole $\|M\|$ désignant la longueur du vecteur M , de sorte que :

$$\|M\|^2 = (M, M).$$

Les p_i sont des nombres non négatifs, dont la somme est égale à 1. Ce sont les « coordonnées » de ψ rapport aux espaces $\mathcal{R}_i$. On peut évidemment choisir ψ de manière que les p_i aient des valeurs choisies à l'avance, telles que :

$$\sum_i p_i = 1.$$

Par convention, on associe aux valeurs x_i des probabilités égales aux nombres p_i .

L'ensemble de ces nombres et de ces probabilités constitue bien une variable aléatoire X .

En langage géométrique, la variable aléatoire X résulte de l'association d'un opérateur linéaire C de l'espace $\mathcal{R}$ et d'un vecteur ψ , l'opérateur fournissant les valeurs possibles de X , et le vecteur ψ coopérant avec C pour fournir les probabilités.

20. — Décomposition spectrale et fonction de répartition [45].

Il est facile de montrer que l'opérateur C s'exprime à l'aide des projecteurs $P_{\mathcal{R}_i}$ par la formule :

$$(25) \quad C = x_1 P_{\mathcal{R}_1} + x_2 P_{\mathcal{R}_2} + \dots + x_n P_{\mathcal{R}_n},$$

qui exprime que le transformé CM du vecteur M est la combinaison linéaire $\sum_i x_i (P_{\mathcal{R}_i} M)$

des vecteurs projections de M sur les sous-espaces propres de C . Prenons, en effet, dans $\mathcal{R}_i$ une base orthonormale arbitraire, c'est-à-dire un système d'axes de coordonnées rectangulaires quelconques, portant n_i vecteurs unitaires $M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{in_i}$, n_i étant le nombre de dimensions de $\mathcal{R}_i$. L'ensemble des M_{ij} est une base orthonormale de $\mathcal{R}$.

Par définition des sous-espaces propres, on a pour tout j ($1 \leq j \leq n_i$),

$$CM_{ij} = x_i M_{ij}.$$

Mais, M_{ij} appartenant à $\mathcal{R}_i$, on a identiquement :

$$M_{ij} = P_{\mathcal{R}_i} M_{ij}, \quad (j = 1, 2, \dots, n_i)$$

et :

$$CM_{ij} = x_i P_{\mathcal{R}_i} M_{ij}.$$

Tout vecteur M est une combinaison linéaire des M_{ij} :

$$M = \sum \xi_{ij} M_{ij},$$

en désignant provisoirement, pour plus de commodité, par ξ_{ij} les coordonnées $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ de M . A cause du caractère linéaire de C et des $P_{\mathcal{R}_i}$,

$$CM = C \sum \xi_{ij} M_{ij} = \sum \xi_{ij} CM_{ij} = \sum \xi_{ij} x_i P_{\mathcal{R}_i} M_{ij}.$$

Mais les espaces $\mathcal{R}_i$ étant deux à deux orthogonaux, la projection d'un vecteur M_{kj} de $\mathcal{R}_k$ sur $\mathcal{R}_i$ est nulle :

$$P_{\mathcal{R}_i} M_{kj} = 0, \quad \text{si} \quad k \neq i,$$

donc :

$$\sum_i x_i P_{\mathcal{R}_i} M = \sum_i x_i P_{\mathcal{R}_i} \sum_{jk} \xi_{kj} M_{kj} = \sum_i x_i \sum_{jk} \xi_{kj} P_{\mathcal{R}_i} M_{kj} = \sum_i x_i \sum_j \xi_{ij} P_{\mathcal{R}_i} M_{ij}.$$

On voit finalement que, pour tout vecteur M :

$$CM = \sum x_i P_{\mathcal{R}_i} M.$$

La formule :

$$C = \sum x_i P_{\mathcal{R}_i}$$

doit être rapprochée de la formule :

$$1 = \sum P_{\mathcal{R}_i},$$

qui exprime qu'un vecteur est la somme de ses projections.

On démontre, d'autre part, que, k étant un entier, l'opérateur C^k a mêmes sous-espaces propres que C , et que ses valeurs propres sont $x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k$. On en déduit la formule générale :

$$(26) \quad C^k = \sum x_i^k P_{\mathcal{R}_i},$$

qui englobe les précédentes.

Il est commode de donner à cette relation une forme un peu différente. Désignons par $E(x)$ l'opérateur de projection sur le sous-espace de $\mathcal{R}$ obtenu en faisant le produit des sous-espaces $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ correspondant à des valeurs propres $x_1, x_2, \dots$ inférieures à x .

Si $x < x_1$, $E(x) = 0$.

Si $x_1 \leq x < x_2$, $E(x)$ se confond avec l'opérateur de projection $P_{\mathcal{R}_1}$ sur $\mathcal{R}_1$.

Si $x_2 \leq x < x_3$, $E(x) = P_{\mathcal{R}_1} + P_{\mathcal{R}_2}$.

.....

Si $x_n \leq x$, $E(x)$ ne modifie pas les vecteurs auxquels on l'applique :
 $E(x) = 1$.

On peut considérer l'opérateur $E(x)$ comme une fonction de la variable x , constante dans tout intervalle x_i, x_{i+1} , [$dE(x) = 0$] et subissant pour $x = x_i$ une discontinuité à égale $P_{\mathcal{R}_i}$:

$$dE(x_i) = P_{\mathcal{R}_i}.$$

Cet opérateur, étant un projecteur, est hermitien. Il n'a naturellement pas d'inverse. Il est par convention continu à droite. Il s'annule pour $x = -\infty$, et est égal à 1 pour $x = +\infty$.

Enfin :

$$E^2(x) = E(x)$$

(propriété caractéristique des projecteurs).

En introduisant l'opérateur $E(x)$, on peut mettre la formule fondamentale :

$$C^k = \sum x_i^k P_{\mathcal{R}_i},$$

sous la forme d'une intégrale de Stieltjes :

$$(27) \quad C^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dE(x).$$

L'intérêt de cette notation est surtout, pour le moment, de fournir une expression utile de la *fonction de répartition* de la variable aléatoire X . Nous avons vu que X peut prendre les valeurs x_i avec les probabilités $p_i = \|P_{\mathfrak{R}_i} \psi\|^2$. On peut écrire :

$$p_i = (P_{\mathfrak{R}_i} \psi, P_{\mathfrak{R}_i} \psi),$$

et, d'après les propriétés des projecteurs,

$$p_i = (P_{\mathfrak{R}_i} P_{\mathfrak{R}_i} \psi, \psi) = (P_{\mathfrak{R}_i} \psi, \psi);$$

la fonction de répartition $F(x)$ de X est la probabilité pour que $X < x$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{x_i < x} p_i = \sum_{x_i < x} (P_{\mathfrak{R}_i} \psi, \psi) = \left[\left(\sum_{x_i < x} P_{\mathfrak{R}_i} \right) \psi, \psi \right]; \\ &= \left[\sum_{x_i < x} dE(x) \psi, \psi \right] = [E(x) \psi, \psi] \\ &= [E^2(x) \psi, \psi] = [E(x) \psi, E(x) \psi]. \end{aligned}$$

Finalement :

$$(28) \quad F(x) = \|E(x) \psi\|^2.$$

21. — Valeurs moyennes. Fonction caractéristique.

La valeur moyenne de la variable aléatoire X est :

$$\overline{X} = \sum p_i x_i.$$

Or :

$$p_i = (P_{\mathfrak{R}_i} \psi, \psi).$$

De sorte que :

$$\overline{X} = \sum x_i (P_{\mathfrak{R}_i} \psi, \psi) = \left[\left(\sum x_i P_{\mathfrak{R}_i} \right) \psi, \psi \right].$$

Mais :

$$C = \sum x_i P_{\mathfrak{R}_i}.$$

Donc :

$$(29) \quad \overline{X} = (C \psi, \psi) = (\psi, C \psi).$$

La valeur moyenne de X est le produit scalaire du vecteur ψ par son transformé par l'opérateur C .

La valeur moyenne de X^k est par suite égale à :

$$\overline{X^k} = (C^k \psi, \psi),$$

et en particulier :

$$\overline{X^2} = (C^2 \psi, \psi) = (C \psi, C \psi) = \|C \psi\|^2.$$

Le carré de l'écart type de X est la valeur moyenne de $(X - \overline{X})^2$, soit :

$$\|(X - \overline{X}) \psi\|^2.$$

La *fonction caractéristique* de X est la valeur moyenne de l'opérateur $e^{i\alpha C}$, où α est un paramètre réel. Cet opérateur n'est plus hermitien, mais *unitaire*. On dit qu'un opérateur U est unitaire si, quels que soient les vecteurs M_1 et M_2 ,

$$(UM_1, UM_2) = (M_1, M_2),$$

et, en particulier, $\|UM\| = \|M\|$. L'opérateur unitaire conserve la longueur.

Si U possède un inverse U^{-1} , on voit, en posant $UM_2 = M'$, c'est-à-dire $M_2 = U^{-1}M'$, que, quels que soient les vecteurs M_1 et M' ,

$$(UM_1, M') = (M_1, U^{-1}M').$$

Pour un opérateur hermitien, on avait :

$$(CM_1, M') = (M_1, CM').$$

Alors que les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont réelles, celles d'un opérateur unitaire sont complexes, et de module unité. S'il existe, en effet, un vecteur M et un nombre λ tels que $UM = \lambda M$, on a :

$$(UM, UM) = (\lambda M, \lambda M) = \lambda \lambda^* (M, M) = |\lambda|^2 \|M\|^2.$$

Mais d'autre part :

$$(UM, UM) = (M, M) = \|M\|^2.$$

Donc :

$$|\lambda|^2 = 1.$$

En particulier, l'opérateur $e^{i\alpha C}$ a pour valeurs propres les nombres $e^{i\alpha x}$. On peut l'exprimer par l'intégrale de Fourier-Stieltjes :

$$(30) \quad e^{i\alpha C} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} dE(x).$$

La valeur moyenne de $e^{i\alpha C}$ a pour expression :

$$\varphi(\alpha) = (e^{i\alpha C} \psi, \psi) = (\psi, e^{-i\alpha C} \psi).$$

L'expression de $\varphi(\alpha)$ par un produit scalaire permet de retrouver immédiatement celle de la *fonction de répartition* de X . En effet :

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} d[E(x) \psi, \psi];$$

le produit scalaire $[E(x) \psi, \psi] = \|E(x) \psi\|^2$ joue donc le rôle de fonction de répartition.

22. — **Système de deux variables aléatoires dans $\mathcal{R}$ [9].**

Pour définir une variable aléatoire isolée X , prenant n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec des probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$, il faut se donner un espace $\mathcal{R}$ à $p \geq n$ dimensions, un opérateur linéaire C de $\mathcal{R}$ et un vecteur unitaire ψ . Il existe évidemment une infinité de manières de définir la même loi de probabilité, en jouant sur le nombre p , sur l'ordre de multiplicité des valeurs propres de C , sur l'orientation des axes propres de C par rapport au repère de base choisi dans C (ce qui n'a qu'une valeur relative) et sur la position du vecteur ψ .

Essayons maintenant de définir simultanément, dans un espace $\mathcal{R}$ convenable, un système de deux variables aléatoires X et X' . Désignons par

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n \\ \text{les valeurs possibles de } X, \text{ par} \\ x'_1, x'_2, \dots, x'_{n'} \end{array}$$

les valeurs possibles de X' , par ϖ_{ij} la probabilité pour que $X = x_i, X' = x'_j$, par

$$p_i = \sum_j \varpi_{ij}$$

la probabilité pour que $X = x_i$, par

$$p'_j = \sum_i \varpi_{ij}$$

la probabilité pour que $X' = x'_j$.

Par extension des résultats des paragraphes précédents, nous devons considérer ϖ_{ij} comme le carré de la projection d'un vecteur unitaire ψ donné sur un certain sous-espace de $\mathcal{R}$. Ce sous-espace pourra être désigné par la notation $\mathcal{R}_{ij}$. On est ainsi conduit à décomposer $\mathcal{R}$ en nn' sous-espaces $\mathcal{R}_{ij}$ deux à deux orthogonaux et à introduire les opérateurs de projection $P_{\mathcal{R}_{ij}}$ sur les $\mathcal{R}_{ij}$.

On posera :

$$\varpi_{ij} = \|P_{\mathcal{R}_{ij}}\psi\|^2, \quad \sum_{ij} \varpi_{ij} = 1.$$

Rangeons les symboles $\mathcal{R}_{ij}$ dans un tableau rectangulaire :

$\mathcal{R}_{11}$	$\mathcal{R}_{12}$	$\dots$	$\mathcal{R}_{1n}$	$\mathcal{R}'_1$
$\mathcal{R}_{21}$	$\mathcal{R}_{22}$	$\dots$	$\mathcal{R}_{2n}$	$\mathcal{R}'_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\mathcal{R}_{n'1}$	$\mathcal{R}_{n'2}$	$\dots$	$\mathcal{R}_{n'n}$	$\mathcal{R}'_{n'}$
$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$	$\dots$	$\mathcal{R}_n$	

Désignons par $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$ les sous-espaces de $\mathcal{R}$ obtenus par association des $\mathcal{R}_{ij}$ correspondant aux différentes colonnes du tableau, par $\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2, \dots, \mathcal{R}'_{n'}$ les sous-espaces de $\mathcal{R}$ correspondant aux différentes lignes. $\mathcal{R}_{ij}$ est l'intersection de $\mathcal{R}_i$ et de $\mathcal{R}'_j$.

On a évidemment :

$$\|P_{\mathcal{R}_i}\psi\|^2 = \|P_{\mathcal{R}_{i_1}}\psi\|^2 + \|P_{\mathcal{R}_{i_2}}\psi\|^2 + \dots + \|P_{\mathcal{R}_{i_{n'}}}\psi\|^2,$$

de sorte que :

$$p_i = \|P_{\mathcal{R}_i}\psi\|^2.$$

De même :

$$p'_{j'} = \|P_{\mathcal{R}'_{j'}}\psi\|^2.$$

Construisons une première transformation C de $\mathcal{R}$ qui admette les sous-espaces $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$ comme sous-espaces propres, et les $x_1, x_2, \dots, x_n$, comme valeurs propres, et une seconde transformation de C' de $\mathcal{R}$ qui admette les sous-espaces $\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2, \dots, \mathcal{R}'_{n'}$, comme sous-espaces propres, et les $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n'}$ comme valeurs propres. Ces transformations sont bien déterminées par les formules :

$$(31) \quad C = \sum_i x_i P_{\mathcal{R}_i}, \quad C' = \sum_{j'} x'_{j'} P_{\mathcal{R}'_{j'}},$$

ou encore :

$$(32) \quad \begin{cases} C = \sum_{ij} x_i P_{\mathcal{R}_{ij}}, & i = 1, 2, \dots, n, \\ C' = \sum_{ij} x'_{j'} P_{\mathcal{R}_{ij}}, & j' = 1, 2, \dots, n', \end{cases}$$

car :

$$P_{\mathcal{R}_i} = \sum_{j=1}^{n'} P_{\mathcal{R}_{ji}}, \quad P_{\mathcal{R}'_{j'}} = \sum_{i=1}^n P_{\mathcal{R}_{ji}}.$$

Les formules (31) définissent individuellement les variables aléatoires X et X' à l'aide de deux opérateurs C et C' du même espace. Les formules (32), utilisant la possibilité de décomposer $P_{\mathcal{R}_i}$ et $P_{\mathcal{R}'_{j'}}$ suivant les mêmes opérateurs de projection $P_{\mathcal{R}_{ij}}$, permettent de définir un type de *dépendance stochastique* entre X et X' .

Les x_{ij} étant un système quelconque de nn' nombres réels, on peut introduire la transformation T de $\mathcal{R}$ qui admet pour valeurs propres les x_{ij} , et pour sous-espaces propres les $\mathcal{R}_{ij}$. On a :

$$T = \sum_{ij} x_{ij} P_{\mathcal{R}_{ij}}.$$

Les propriétés des opérateurs C et C' , et la possibilité de les utiliser pour définir un système de deux variables aléatoires, sont au fond la conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME. — Dans l'espace $\mathcal{R}$, les opérateurs C et C' commutent.

En effet :

$$CC' = \left(\sum_{ij} x_i P_{\mathcal{R}_{ij}} \right) \left(\sum_{kl} x'_{l'} P_{\mathcal{R}_{lk}} \right) = \sum_{ijkl} x_i x'_{l'} P_{\mathcal{R}_{ji}} P_{\mathcal{R}_{lk}}.$$

Mais le produit des projections sur les espaces orthogonaux $\mathcal{R}_{ji}$ $\mathcal{R}_{lk}$ est nul, sauf si ces espaces sont confondus, c'est-à-dire si $k = i$, $l = j$, auquel cas il se réduit à $P_{\mathcal{R}_{ij}}$:

$$CC' = \sum_{ij} x_i x'_j P_{\mathcal{R}_{ij}}.$$

L'expression de $C'C$ est manifestement la même.

L'opérateur $CC' = C'C$ a pour sous-espaces propres les $\mathcal{R}_{ij}$, et pour valeurs propres les produits $x_i x'_j$ des valeurs propres de C et de C' .

23. — Valeurs moyennes. Fonctions caractéristiques. Probabilités liées.

Puisque C et C' commutent, on peut définir sans ambiguïté l'opérateur $\mathcal{F}(C, C')$, où la fonction $\mathcal{F}$ est un polynôme ou une série entière (sous réserve de convergence). Cet opérateur est donné par la formule :

$$\mathcal{F}(C, C') = \sum_{ij} \mathcal{F}(x_i, x'_j) P_{\mathcal{R}_{ij}}.$$

La valeur moyenne de la variable aléatoire $\mathcal{F}(X, X')$ est :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}} &= \sum \varpi_{ij} \mathcal{F}(x_i, x'_j) \\ &= \sum (P_{\mathcal{R}_{ij}} \psi, \psi) \mathcal{F}(x_i, x'_j) \\ &= [\mathcal{F}(C, C') \psi, \psi]. \end{aligned}$$

C'est le produit scalaire de ψ par son transformé $\mathcal{F}\psi$.

En particulier, la *fonction caractéristique* de X, X' est égale à :

$$\varphi(\alpha, \beta) = [e^{i(\alpha C + \beta C')} \psi, \psi];$$

c'est la valeur moyenne de la variable aléatoire $e^{i(\alpha X + \beta X')}$, associée au groupe d'opérateurs unitaires à deux paramètres :

$$e^{i(\alpha C + \beta C')} = \sum e^{i(\alpha x_i + \beta x'_j)} P_{\mathcal{R}_{ij}}.$$

Pour avoir la *probabilité liée* d'une valeur x'_j de X' , connaissant la valeur x_i de X , il suffit de se placer dans le sous-espace $\mathcal{R}_i$ relatif à la valeur x_i de X , et d'y projeter le vecteur ψ . On obtient un vecteur $P_{\mathcal{R}_i} \psi$ non unitaire, qu'on norme en le remplaçant par le vecteur :

$$\frac{P_{\mathcal{R}_i} \psi}{\sqrt{\|P_{\mathcal{R}_i} \psi\|^2}} = \frac{\sum_k P_{\mathcal{R}_{ik}} \psi}{\sqrt{\|P_{\mathcal{R}_i} \psi\|^2}}.$$

La projection de ce vecteur sur le sous-espace $\mathcal{R}_{ij}$ de $\mathcal{R}_j$ et de $\mathcal{R}_i$ est égale à :

$$\frac{P_{\mathcal{R}_{ij}} P_{\mathcal{R}_i} \psi}{\sqrt{\|P_{\mathcal{R}_i} \psi\|^2}} = \frac{\sum_k P_{\mathcal{R}_{ij}} P_{\mathcal{R}_i} \psi}{\sqrt{\|P_{\mathcal{R}_i} \psi\|^2}} = \frac{P_{\mathcal{R}_{ij}} \psi}{\sqrt{\|P_{\mathcal{R}_i} \psi\|^2}},$$

et le carré de la longueur de cette projection est égal à :

$$\frac{\|P_{\mathcal{R}_{ij}} \psi\|^2}{\|P_{\mathcal{R}_i} \psi\|^2} = \frac{\varpi_{ij}}{p_i}.$$

C'est bien la probabilité liée de x'_j pour $X = x_i$.

24. — Cas particuliers [9].

Étant données deux variables aléatoires X, X' , on peut toujours leur associer une décomposition d'un espace euclidien convenablement *choisi* en nn' sous-espaces $\mathcal{R}_{ij}$, de façon à satisfaire à la fois au théorème des probabilités totales, au théorème des probabilités composées, et à la définition de chacune de ces deux variables aléatoires par un opérateur linéaire de $\mathcal{R}$ et un vecteur unitaire. Les opérateurs C, C' associés à X et X' commutent nécessairement dans $\mathcal{R}$ et l'on peut toujours construire $\mathcal{R}$ de façon qu'il en soit ainsi.

Mais il peut arriver que l'espace $\mathcal{R}$ sur lequel opèrent C et C' soit *donné d'avance*, que les opérateurs C et C' soient aussi donnés d'avance, et que l'on impose qu'ils transforment le *même espace* $\mathcal{R}$ (c'est ce qui se passe en mécanique quantique, pour les problèmes où le spin n'intervient pas). Analytiquement, cela veut dire que les *matrices* C et C' sont données simultanément. On peut évidemment faire un changement de coordonnées dans $\mathcal{R}$, mais il transforme en même temps C et C' . Le problème qui se pose, et qui n'est pas tout à fait le même que celui qui a fait l'objet des paragraphes précédents, est donc le suivant :

Étant donnés deux opérateurs C et C' définis dans le même espace $\mathcal{R}$, et un vecteur unitaire ψ de $\mathcal{R}$, peut-on leur faire correspondre un système de deux variables aléatoires X et X' compatible avec le théorème des probabilités composées ?

D'après ce qui précède, le problème *n'est pas possible si C et C' ne commutent pas*. On retrouve ainsi un résultat classique.

Si C et C' commutent, le problème est possible, et la dépendance stochastique entre X et X' est bien définie. En effet, l'opérateur unitaire :

$$e^{i(\alpha C + \beta C')}$$

est bien défini, et par suite la fonction caractéristique du système X, X' a pour expression :

$$\varphi(\alpha, \beta) = [e^{i(\alpha C + \beta C')} \psi, \psi].$$

On peut dire aussi que, si C et C' commutent, ils ont mêmes axes propres. Plus généralement, on peut décomposer l'espace $\mathcal{R}$ en sous-espaces deux à deux orthogonaux

dont chacun est invariant à la fois par C et par C'. Un tel espace $\mathfrak{R}_{ij}$ est le lieu des points M qui satisfont à la fois aux deux équations :

$$\begin{aligned} \text{CM} &= x_i \text{ M}, \\ \text{C}'\text{M} &= x'_j \text{ M}, \end{aligned}$$

où x_i et x'_j sont deux valeurs propres données de C et C'. Le carré de la projection de ψ sur $\mathfrak{R}_{ij}$ est la probabilité pour que $\text{X} = x_i$, $\text{X}' = x'_j$.

En général, l'ensemble des solutions de l'équation $\text{CM} = x_i \text{ M}$ contient les vecteurs de $\mathfrak{R}_{ji}$, et d'autres vecteurs. C'est un sous-espace $\mathfrak{R}_i$ de $\mathfrak{R}$, qui admet à son tour $\mathfrak{R}_{ji}$ pour sous-espace. De même pour l'équation $\text{C}'\text{M} = x'_j \text{ M}$.

Il peut arriver que les solutions communes à des deux équations constituent en même temps toutes les solutions de l'une d'entre elles, la première par exemple. Cela veut dire que $\mathfrak{R}_{ji}$ est identique à $\mathfrak{R}_i$ et que la colonne de rang i du tableau rectangulaire des $\mathfrak{R}_{ji}$ ne contient que le terme $\mathfrak{R}_{ji}$. Si $\text{X} = x_i$, on est sûr que $\text{X}' = x'_j$, mais non réciproquement :

$$\varpi_{ij} = p_i; \quad \varpi_{ik} = 0, \text{ si } k \neq j.$$

Si les équations $\text{CM} = x_i \text{ M}$, $\text{C}'\text{M} = x'_j \text{ M}$ ont les mêmes solutions, on est sûr que l'épreuve qui fournit pour X la valeur x_i fournit aussi pour X' la valeur x'_j , et réciproquement.

Le cas limite est celui où cette circonstance se produirait pour toutes les valeurs propres de C et C', supposées en même nombre. Les équations :

$$\text{CM} = x \text{ M}, \quad \text{C}'\text{M} = x' \text{ M},$$

diviseraient l'espace $\mathfrak{R}$ de la même façon. Sous réserve d'avoir convenablement numéroté les valeurs propres, on établit ainsi une correspondance obligée entre le x_i et les x'_j . Si $\text{X} = x_i$, on est sûr que $\text{X}' = x'_j$, et réciproquement. La dépendance stochastique entre X et X' se réduit à une *dépendance fonctionnelle*. On peut poser :

$$\text{X}' = f(\text{X}),$$

la fonction f étant définie, sur l'ensemble des valeurs propres, par les égalités :

$$x'_i = f(x_i).$$

25. — Généralisation. Opérateurs linéaires de l'espace de Hilbert.

Les opérateurs linéaires des espaces euclidiens $\mathfrak{R}$ à un nombre fini de dimensions donnent un moyen géométrique de construire une variable aléatoire ayant un nombre fini de valeurs. Si le spectre des valeurs est un ensemble infini, dénombrable ou non, il faut faire appel à l'espace de Hilbert $\mathcal{E}$.

Partons de la définition axiomatique de l'espace de Hilbert. Nous supposons définie la somme de deux éléments de $\mathcal{E}$, le produit d'un élément par un nombre complexe (ces opérations étant associatives, commutatives et convenablement distributives), l'élément 0, le produit scalaire de deux éléments et la longueur d'un élément. L'espace euclidien $\mathcal{R}$ est un cas particulier de l'espace de Hilbert $\mathcal{E}$.

Un *opérateur* C de $\mathcal{E}$ fait correspondre à un élément M d'un certain sous-espace $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$ (domaine d'existence de C) un élément $M' = CM$ d'un sous-espace $\mathcal{E}_2$ de $\mathcal{E}$ (domaine des valeurs). C'est un *opérateur linéaire* si son domaine d'existence $\mathcal{E}_1$ est une variété linéaire dans $\mathcal{E}$ et si, quels que soient les éléments M_1, M_2 de $\mathcal{E}_1$ et les nombres complexes α_1, α_2 , on a :

$$C(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) = \alpha_1 CM_1 + \alpha_2 CM_2.$$

Un opérateur linéaire C est *self adjoint* si, pour tout couple d'éléments M_1, M_2 de $\mathcal{E}_1$, on a :

$$(CM_1, M_2) = (M_1, CM_2),$$

les notations étant les mêmes que pour les espaces $\mathcal{R}$.

Un opérateur linéaire C est borné si, quel que soit l'élément M de son domaine d'existence $\mathcal{E}_1$, il existe un nombre fixe K tel que :

$$\|CM\| < K \|M\|.$$

Il est très souvent commode de se représenter l'espace de Hilbert sous *forme fonctionnelle*. Ses éléments M sont alors des fonctions de carré sommable. Nous prendrons pour fixer les idées des fonctions $\xi(s)$ d'une variable s , telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(s)|^2 ds$ existe. Le *produit scalaire* de deux éléments $\xi_1(s), \xi_2(s)$ est l'intégrale :

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1(s) \xi_2^*(s) ds = (\xi_2, \xi_1)^*.$$

La *longueur* de l'élément $\xi(s)$ est la racine carrée de l'intégrale :

$$\|\xi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(s)|^2 ds.$$

L'existence du produit scalaire résulte de l'inégalité de Schwarz.

26. — Valeurs propres, décompositions spectrales et fonctions caractéristiques [1-45].

Dans l'espace $\mathcal{R}$, la définition géométrique des variables aléatoires résulte de la correspondance entre les valeurs possibles de la variable aléatoire X et les valeurs propres de l'opérateur linéaire C , c'est-à-dire les solutions x de l'équation :

$$CM = xM.$$

Or, la résolution de cette équation dans l'espace de Hilbert est difficile et se heurte, dans les cas les plus courants, à des contradictions. Supposons, *par exemple*,

que, dans l'espace fonctionnel, C soit l'opérateur de multiplication par s . C'est bien un opérateur linéaire. Le domaine d'existence $\mathcal{E}_1$ est l'ensemble des fonctions $\xi(s)$, de carré sommable, telles que leurs transformées $s\xi(s)$ soient de carré sommable. Le domaine des valeurs $\mathcal{E}_2$ est confondu avec $\mathcal{E}$. Mais $\mathcal{E}_1$ est un sous-espace de $\mathcal{E}$, celui des fonctions $\xi(s)$ telles que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2 |\xi(s)|^2 ds$$

existe. L'équation $CM = xM$ s'écrit ici :

$$(s - x) \xi(s) = 0.$$

Elle n'a aucune solution continue.

Il est cependant possible d'attacher à l'opérateur $C = s$ une variable aléatoire. Nous étudierons cet exemple plus loin et nous montrerons qu'il lui correspond un spectre continu de valeurs propres. Il peut arriver aussi qu'à une valeur propre donnée corresponde un ensemble infini plus ou moins compliqué de fonctions propres.

Voici un *autre exemple* où cette circonstance se produit. Considérons un *opérateur intégral* linéaire et homogène, qui fasse passer d'une fonction $\xi(s)$ de carré sommable à une fonction $\xi_1(t)$ par la formule :

$$\xi_1(t) = \int_{x_0}^{x_1} K(t, s) \xi(s) ds,$$

où $K(x, s)$ est une fonction bornée et continue. On peut encore poser symboliquement :

$$\xi_1 = C \xi.$$

Si x_0 et x_1 sont finis, l'équation $C\xi = x\xi$ (*équation intégrale de Fredholm*) a des valeurs propres déterminées, en nombre fini ou dénombrable, auxquelles correspondent des sous-espaces propres à un nombre fini de dimensions. Mais si x_1 est infini, il n'est plus possible d'énoncer de résultats aussi généraux. Considérons par exemple la transformation de Fourier :

$$\xi_1(t) = \int_0^{\infty} \xi(s) \cos st ds.$$

Le noyau $\cos st$ est borné et continu. Or, on sait qu'il existe une classe étendue de fonctions paires $f(s)$ telles que, si l'on pose :

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(s) \cos st ds,$$

on ait inversement :

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(s) \cos st ds.$$

Il en résulte que :

$$f(t) + g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [f(s) + g(s)] \cos st ds.$$

La somme d'une fonction (presque) *quelconque* $f(s)$ et de sa transformée de Fourier $g(s)$ est donc une solution propre de l'opérateur C défini par le noyau $\cos st$. Toutes ces solutions propres correspondent à l'unique valeur propre $x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. A la valeur propre $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ correspondent les solutions propres $g(s) - f(s)$. On peut remarquer qu'on peut aussi associer à la valeur propre $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ la famille *dénombrable* de fonctions propres $P_{4n}(s) e^{-\frac{s^2}{2}}$ et à la valeur propre $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ la famille *dénombrable* de fonctions propres $P_{4n+2}(s) e^{-\frac{s^2}{2}}$, où :

$$P_n(s) = e^{s^2} \frac{d^n}{ds^n} e^{-s^2}$$

est le polynôme d'Hermite d'ordre n .

On voit sur cet exemple combien la structure des sous-espaces propres d'un opérateur linéaire de $\mathcal{E}$ peut-être compliquée.

La méthode générale de Von Neumann consiste à généraliser la relation (26) du paragraphe 20, et à introduire la décomposition spectrale $E(x)$ de l'opérateur C . Il sera plus commode de partir à l'envers, de la notion de décomposition spectrale. Définissons une famille d'opérateurs $E(x)$ par les conditions suivantes :

1° $E(x)$ est un opérateur self adjoint défini dans $\mathcal{E}$.

2° $E^2(x) = E(x)$; autrement dit, $E(x)$ est un opérateur de projection.

On peut encore dire que, si $x \leq x'$, $E(x) E(x') = E(x)$, ou que le domaine des valeurs de $E(x)$ est contenu dans le domaine des valeurs de $E(x')$, ce qu'on écrit :

$$E(x) < E(x').$$

3° Si $x \rightarrow -\infty$, $E(x) \rightarrow 0$.

Si $x \rightarrow +\infty$, $E(x) \rightarrow 1$.

$E(x)$ est continu à droite.

4° Pour tout élément M de $\mathcal{E}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\|E(x) M\|^2$ existe.

$E(x)$ étant ainsi défini, on considère l'opérateur :

$$(33) \quad C = \int_{-\infty}^{\infty} x dE(x),$$

ou, ce qui revient au même, on forme le produit scalaire :

$$(CM_1, M_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x d[E(x) M_1, M_2],$$

qui est une intégrale de Stieltjes ordinaire. On démontre que cet opérateur est self adjoint, et qu'il est défini dans $\mathcal{E}$. On dit que $E(x)$ est la *famille spectrale* de l'opérateur self adjoint C . Nous ne chercherons pas à préciser les conditions sous lesquelles un

opérateur self adjoint admet une famille spectrale et nous nous bornerons aux opérateurs de ce type.

On appelle valeur propre de C tout point de discontinuité de $E(x)$, et, par extension, si $E(x)$ varie continûment en fonction de x , on dit que le spectre des *valeurs* propres est continu.

Soit alors ψ un élément fixe normé de l'espace $\mathcal{E}$, par exemple une fonction $\psi(s)$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(s)|^2 ds = 1.$$

On attache à l'ensemble de C et de ψ une variable aléatoire X ayant pour fonction de répartition :

$$(34) \quad F(x) = \|E(x)\psi\|^2.$$

Les propriétés de $E(x)$ montrent que $F(x)$ est bien une fonction de répartition, fonction non décroissante, nulle pour $x = -\infty$, égale à 1 pour $x = +\infty$.

Dans le cas de l'espace $\mathcal{R}$, $F(x)$ est une fonction en escalier admettant un nombre fini de sauts. Maintenant $F(x)$ est une fonction de répartition tout à fait quelconque, qui peut dans certains cas admettre une densité de probabilité.

La *fonction caractéristique* de X est :

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} d\|E(x)\psi\|^2;$$

mais :

$$\|E(x)\psi\|^2 = [E(x)\psi, E(x)\psi] = [E^2(x)\psi, \psi] = [E(x)\psi, \psi].$$

Donc :

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} [dE(x)\psi, \psi] = \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dE(x) \right) \psi, \psi \right].$$

Posons par convention :

$$(35) \quad e^{i\alpha C} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dE(x).$$

Alors :

$$(36) \quad \varphi(\alpha) = (e^{i\alpha C}\psi, \psi).$$

Nous connaissons déjà les formules :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dE(x),$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} x dE(x).$$

Nous en déduisons la formule :

$$\overline{X} = (C\psi, \psi).$$

Les itérées de C seront données par les formules :

$$C^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dE(x),$$

dans la mesure où les moments $\overline{X^k}$ existent, et on pourra en déduire que le symbole opérationnel $e^{i\alpha C}$ peut être défini par le développement :

$$e^{i\alpha C} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^k}{k!} C^k.$$

Si ce développement n'a pas de sens, l'opérateur $e^{i\alpha C}$ restera cependant bien défini par la formule (35), et l'expression de $\varphi(\alpha)$ sera toujours valable. $e^{i\alpha C}$ est un *opérateur unitaire* dépendant du paramètre α . L'ensemble des opérateurs $e^{i\alpha C}$ constitue un *groupe à un paramètre*, dont E. ARNOUS a fait une étude systématique. Il a montré l'intérêt qu'il y avait à substituer à l'opérateur self adjoint C le groupe d'opérateurs unitaires $e^{i\alpha C} = U_\alpha$. Les relations entre C et U_α proviennent schématiquement des résultats suivants :

Pour $\alpha = 0$, U_α se réduit à la transformation identique. Si α est infiniment petit, $U_\alpha \psi(s)$ est une fonction infiniment voisine de $\psi(s)$. L'opérateur qui fait passer de $\psi(s)$ à $U_\alpha \psi(s)$ est le produit par i de ce qu'on appelle la *transformation infinitésimale* du groupe U_α . Or la partie principale de $U_\alpha - 1$ est $i\alpha C$. Donc C est le produit par i de la transformation infinitésimale du groupe des opérateurs unitaires $U_\alpha = e^{i\alpha C}$ ou, ce qui revient au même, $U_\alpha \psi$ est la solution de l'équation fonctionnelle $\frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = C f$ qui se réduit à ψ pour $\alpha = 0$.

Il nous suffira de signaler que ces considérations ont permis à E. ARNOUS de justifier entièrement l'emploi sans restrictions de la fonction caractéristique, sous la forme fondamentale :

$$\varphi(\alpha) = (U_\alpha \psi, \psi),$$

comme intermédiaire entre la théorie des opérateurs linéaires de l'espace de Hilbert et le calcul des probabilités. Nous ferons dans la suite un usage constant de cette expression de la fonction caractéristique. La notion de valeur propre passe au second plan et la définition d'une variable aléatoire dans le schéma hilbertien peut prendre maintenant l'une ou l'autre des deux formes suivantes, qui sont équivalentes : *étant donné un vecteur unitaire ψ de l'espace de Hilbert $\mathcal{E}$:*

a) si C est un opérateur self adjoint de $\mathcal{E}$, on lui associe une variable aléatoire X ayant pour valeur moyenne $\overline{X} = (C \psi, \psi)$;

b) si U_α est un groupe d'opérateurs unitaires de $\mathcal{E}$, on lui associe une fonction caractéristique $\varphi(\alpha) = (U_\alpha \psi, \psi)$;

U_α est relié formellement à C par la formule $U_\alpha = e^{i\alpha C}$, dont la signification vient d'être rappelée.

27. — Système de deux variables aléatoires dans l'espace de Hilbert.

Soient C et C' deux opérateurs linéaires admettant $E(x)$ et $E'(x')$ pour décomposition spectrale, de sorte que :

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} x dE(x), \quad C' = \int_{-\infty}^{\infty} x' dE(x').$$

A C on associe, dans un *premier espace de Hilbert* $\mathcal{E}$, un vecteur ψ , pour construire une variable aléatoire X . A C' on associe, dans un *second espace de Hilbert* $\mathcal{E}'$, un vecteur ψ' , pour construire une variable aléatoire X' . Par extension de ce qui a été dit dans le cas des espaces à un nombre fini de dimension, on doit chercher un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans lequel opèrent C et C' , et dans lequel C et C' commutent. On sait que cette dernière condition équivaut à dire que les opérateurs de projection $E(x)$ et $E'(x')$ commutent.

Il y a donc deux cas à distinguer :

Premier cas. — $E(x)$ et $E'(x')$ commutent dans le même espace de Hilbert initial. On peut alors prendre $\mathcal{H} = \mathcal{E} = \mathcal{E}'$. La fonction caractéristique du système C, C' est la moyenne attachée à l'opérateur :

$$e^{i(\alpha C + \beta C')},$$

où α et β sont deux nombres réels. Cet opérateur est identique à $e^{i\alpha C} \cdot e^{i\beta C'}$, ou à $e^{i\beta C'} \cdot e^{i\alpha C}$.

D'où l'expression de la fonction caractéristique :

$$\varphi(\alpha, \beta) = [e^{i(\alpha C + \beta C')} \psi, \psi].$$

La fonction de répartition s'en déduit, car :

$$\begin{aligned} e^{i\alpha C} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dE(x), & e^{i\beta C'} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x'} dE'(x'), \\ e^{i(\alpha C + \beta C')} &= \iint e^{i(\alpha x + \beta x')} d[E(x) E'(x')], \end{aligned}$$

la dernière intégrale étant étendue à tout le plan des x, x' .

Par suite :

$$\varphi(\alpha, \beta) = \iint e^{i(\alpha x + \beta x')} d[E(x) E'(x') \psi, \psi].$$

La fonction de répartition a donc pour expression :

$$[E(x) E'(x') \psi, \psi] = [E^2(x) E'^2(x') \psi, \psi],$$

parce que E et E' sont des opérateurs de projection, ou encore, puisque ces opérateurs commutent et sont hermitiens,

$$\begin{aligned} [E(x) E'^2(x') \psi, E(x) \psi] &= [E'(x') E(x) E'(x') \psi, E(x) \psi] \\ &= [E(x) E'(x') \psi, E'(x') E(x) \psi] = \|E(x) E'(x') \psi\|^2. \end{aligned}$$

Telle est l'expression cherchée. Elle a les propriétés d'une vraie fonction de répartition.

Deuxième cas. — $E(x)$ et $E'(x')$ ne commutent pas.

Cela veut dire que, appliqués au même espace de Hilbert $\mathcal{E}$, C et C' ne commutent pas. Supposons donc C et C' appliqués à deux espaces distincts $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, et cherchons un espace plus général $\mathcal{H}$ dans lequel C et C' commutent. Ce problème se résout facilement dans la représentation fonctionnelle de l'espace de Hilbert. Faisons agir C et $E(x)$ sur les fonctions de carré sommable d'une variable s (espace $\mathcal{E}$), et C' et $E'(x')$ sur les fonctions de carré sommable d'une autre variable s' . Appelons espace $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions de carré sommable de s et s' . Un vecteur de $\mathcal{H}$ est donc une fonction $\psi(s, s')$. Il est clair que, dans $\mathcal{H}$, les opérateurs C et C' commutent. On est donc ramené au premier cas. On a encore ici :

$$\varphi(\alpha, \beta) = \iint e^{i(\alpha x + \beta x')} d[E(x) E'(x') \psi, \psi],$$

l'élément différentiel s'écrivant :

$$[E(x) E'(x') \psi, \psi] = \iint \psi^*(s, s') E(x) E'(x') \psi(s, s') ds ds',$$

et l'intégrale étant étendue au plan des s, s' .

Étudions comment se répercute dans l'espace $\mathcal{H}$ le théorème des probabilités totales. Il s'agit de résoudre le problème suivant : on donne :

dans $\mathcal{E}$, une variable aléatoire X par un opérateur C et une fonction $\psi_1(s)$ de carré normé;

dans $\mathcal{E}'$, une variable aléatoire X' par un opérateur C' et une fonction $\psi_2(s')$ de carré normé.

Quelles sont les relations qui existent entre $\psi(s, s')$, $\psi_1(s)$ et $\psi_2(s')$?

Nous supposerons pour fixer les idées que les opérateurs C et C' admettent une suite discrète de valeurs propres simples $x_1, x_2, \dots$ et $x'_1, x'_2, \dots$, auxquelles correspondent des fonctions propres normées $\xi_1(s), \xi_2(s), \dots$ et $\xi'_1(s'), \xi'_2(s'), \dots$ formant deux systèmes complets.

Développons $\psi(s, s')$, considérée comme fonction de s , suivant les $\xi_n(s)$:

$$\psi(s, s') = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(s) a_n(s'),$$

les $a_n(s')$ étant des coefficients fonctions de s' , eux-mêmes de carré sommable.

Développons chaque $a_n(s')$ suivant les $\xi'_p(s')$:

$$a_n(s') = \sum_{p=0}^{\infty} \mu_{np} \xi'_p(s').$$

On a alors :

$$\psi(s, s') = \sum_{np} \mu_{np} \xi_n(s) \xi'_p(s').$$

Formons maintenant la fonction caractéristique $\varphi(\alpha, \beta)$ de X, X' :

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int \psi^\star(s, s') e^{i(\alpha C + \beta C')} \psi(s, s') ds ds' = \sum_{np} \mu_{np} \int \psi^\star(s, s') e^{i(\alpha C + \beta C')} \xi_n(s) \xi'_p(s') ds ds'.$$

Comme C et C' commutent,

$$e^{i(\alpha C + \beta C')} = e^{i\alpha C} \xi_n(s) e^{i\beta C'} \xi'_p(s'),$$

et, d'après la définition des fonctions ξ_n et ξ'_p ,

$$\begin{aligned} e^{i\alpha C} \xi_n(s) &= e^{i\alpha x_n} \xi_n(s), \\ e^{i\beta C'} \xi'_p(s') &= e^{i\beta x'_p} \xi'_p(s'). \end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi(\alpha, \beta) = \sum_{np} \mu_{np} \int \psi^\star(s, s') e^{i(\alpha x_n + \beta x'_p)} \xi_n(s) \xi'_p(s') ds ds'.$$

Les relations d'orthogonalité montrent que :

$$\int \psi(s, s') \xi_n^\star(s) \xi'_p(s') ds ds' = \mu_{np}.$$

Donc :

$$\varphi(\alpha, \beta) = \sum_{np} |\mu_{np}|^2 e^{i(\alpha x_n + \beta x'_p)}.$$

$|\mu_{np}|^2$ est donc la probabilité des égalités $X = x_n$ et $X' = x'_p$. Formons de même, dans $\mathcal{E}$ la probabilité pour que $X = x_n$. X a pour fonction caractéristique :

$$\int \psi_1^\star(s) e^{i\alpha C} \psi_1(s) ds.$$

Posons :

$$\psi_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \xi_n(s).$$

Nous obtenons pour la fonction caractéristique l'expression :

$$\sum_n \mu_n \int \psi_1^\star(s) e^{i\alpha C} \xi_n(s) ds = \sum_n \mu_n \int \psi_1^\star(s) e^{i\alpha x_n} \xi_n(s) ds = \sum_n |\mu_n|^2 e^{i\alpha x_n}.$$

$|\mu_n|^2$ est donc la probabilité de l'égalité $X = x_n$. Le théorème des probabilités totales s'écrit :

$$(37) \quad |\mu_n|^2 = \sum_p |\mu_{np}|^2.$$

Se donner le vecteur ψ_1 dans $\mathcal{E}$, c'est se donner ses composantes μ_n suivant la base complète ψ_n (adaptée à C). Les composantes des vecteurs $\psi(s, s')$ possibles sont simplement liées par la relation (37).

La décomposition :

$$\psi(s, s') = \sum \mu_{np} \xi_n(s) \xi'_p(s'),$$

est l'analogue de la relation :

$$\psi = \sum P_{\mathfrak{R}_n} P_{\mathfrak{R}_p} \psi$$

du paragraphe 21.

28. — Remarques et compléments [2-8-45].

1° Il peut arriver que deux opérateurs C, C' agissent obligatoirement sur le même espace $\mathcal{E}$. Il leur correspond individuellement deux variables aléatoires. Si ces deux opérateurs commutent, on sait définir leur dépendance stochastique. D'une façon plus générale, étant donnés n opérateurs qui commutent deux à deux dans $\mathcal{E}$, on sait, à partir d'un vecteur unitaire de $\mathcal{E}$, construire la loi de probabilité du système des n variables aléatoires qui leur sont associées.

Si les opérateurs C et C' ne commutent pas, la théorie des opérateurs ne permet pas, en restant dans $\mathcal{E}$, de fixer la dépendance stochastique (si son existence est compatible avec les lois de probabilité individuelles entre les variables aléatoires associées à C et C').

On peut cependant essayer de former la fonction caractéristique de C et C', c'est-à-dire la quantité :

$$\varphi(\alpha, \beta) = [e^{i(\alpha C + \beta C')} \psi, \psi].$$

Comme $\alpha C + \beta C'$ est un opérateur self adjoint bien défini, il en est de même de l'opérateur $e^{i(\alpha C + \beta C')}$. Les calculs du paragraphe 27 subsistent, mais $e^{i(\alpha C + \beta C')}$ n'est pas égal au produit $e^{i\alpha C} e^{i\beta C'}$. En tenant compte des remarques qui terminent le paragraphe 26, on peut aussi dire ceci : $\varphi(\alpha, \beta)$ est le produit scalaire de ψ par la fonction $e^{i(\alpha C + \beta C')} \psi$. Or, posons :

$$f(s_0) = e^{i(\alpha C + \beta C') s_0} \psi,$$

la fonction $f(s_0)$ est la solution de l'équation fonctionnelle :

$$\frac{1}{i} \frac{\partial f(s_0)}{\partial s_0} = (\alpha C + \beta C') f(s_0),$$

qui se réduit pour $s_0 = 0$ à la fonction ψ . Le produit scalaire $[f(s_0), \psi]$ est une fonction caractéristique relativement à la variable s_0 . Mais, s_0 étant fixé, ce n'est pas une fonction caractéristique pour l'ensemble des variables α et β (sauf si C et C' commutent). En particulier :

$$\varphi(\alpha, \beta) = [f(0), \psi],$$

n'est pas en général une fonction caractéristique.

La fonction de répartition peut s'écrire :

$$[E(x) E'(x') \psi, \psi] = [E^2(x) E'^2(x') \psi, \psi] = [E(x) E^2(x') \psi, E(x) \psi],$$

mais on ne peut aller plus loin, parce que $E(x)$ et $E'(x')$ ne commutent pas.

On n'obtient donc pas une vraie fonction de répartition. C'est une fonction variant de 0 à 1, mais qui n'est pas nécessairement monotone par rapport à x et x' . S'il y a une densité de probabilité, elle n'est pas forcément positive, quoique restant normée.

2° On peut se demander à quelle condition l'association d'un opérateur $C(t)$ et d'un vecteur $\psi(t)$, qui représente une loi de probabilité variable, permet de définir une *fonction aléatoire* $X(t)$.

Si d'abord ψ ne dépend pas de t , il faut que l'on sache construire la loi de probabilité du système $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$, quel que soit l'entier n , c'est-à-dire que les opérateurs $C(t_1), C(t_2), \dots, C(t_n)$ commutent deux à deux dans $\mathcal{E}$, quels que soient $t_1, t_2, \dots, t_n$ et n .

Si cela n'est pas réalisé, le problème n'a pas de solutions dans l'espace $\mathcal{E}$. Si maintenant ψ dépend de t , le problème n'est même pas en général susceptible d'un énoncé en langage classique. L'exemple le plus fréquent dans les applications est celui où ψ dépend de t , et où C n'en dépend pas. On forme une *loi de probabilité variable* en associant à un opérateur fixe un état variable. A quelles conditions obtient-on ainsi une *fonction aléatoire*, ce qui est tout autre chose qu'une loi de probabilité variable ?

Nous nous bornerons à quelques indications sommaires sur la solution de ce problème. Une solution partielle a été donnée [2] lorsqu'il est possible de remplacer la statistique sur C au temps t par une statistique sur un opérateur C_t bien déterminé et fonction de t dans l'état de référence unique $\psi(0) = \psi_0$. En mécanique quantique par exemple, $\psi = \psi(t)$ se déduit de ψ_0 par une transformation unitaire U_t précise :

$$\psi(t) = U_t \psi_0.$$

La moyenne associée à C est :

$$(C\psi, \psi) = (CU_t \psi_0, U_t \psi_0) = (U_t^* C U_t \psi_0, \psi_0),$$

U_t^* désignant l'opérateur adjoint de U_t (qui se réduit à U_t^{-1} si U_t admet un inverse).

Si l'on pose :

$$C_t = U_t^* C U_t,$$

on a :

$$(C\psi, \psi) = (C_t \psi_0, \psi_0),$$

et l'on est bien ramené à un état fixe. (Bien entendu, ce raisonnement n'est qu'une indication, et il doit être complété pour être rendu rigoureux et utilisable.)

Si les opérateurs $C_{t_1}, C_{t_2}, \dots, C_{t_n}$ commutent dans $\mathcal{E}$, le problème est possible. S'ils ne commutent pas dans $\mathcal{E}_1$, il est nécessaire de se placer dans un espace $\mathcal{H}$ plus large que $\mathcal{E}$. Bornons-nous à examiner le système des variables aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$ correspondant aux opérateurs $C(t_1) = C_1$ et $C(t_2) = C_2$ et aux états $\psi(s, t_1)$ et $\psi(s, t_2)$.

Il faut introduire un état $\psi(s, s', t_1, t_2)$ dans $\mathcal{H}$, $C(t_1)$ agissant sur la variable s , et $C(t_2)$ sur la variable s' . La fonction ψ doit être symétrique par rapport aux couples de variables s, t_1 et s', t_2 .

La fonction caractéristique de $X(t_1), X(t_2)$ a pour expression correcte :

$$\varphi(\alpha, \beta, t_1, t_2) = \int \psi^*(s, s', t_1, t_2) e^{i(\alpha C_1 + \beta C_2)} \psi(s, s', t_1, t_2) ds ds'.$$

La relation entre $\psi(s, s', t_1, t_2)$ et l'état $\psi(s, t)$ dans $\mathcal{E}$ s'obtient en écrivant de deux façons différentes la fonction caractéristique de $X(t_1)$:

$$\int \psi^*(s, s', t_1, t_2) e^{i\alpha C_1} \psi(s, s', t_1, t_2) ds ds' = \int \psi^*(s, t_1) e^{i\alpha C_1} \psi(s, t_1) ds.$$

LES VARIABLES ALÉATOIRES EN MÉCANIQUE QUANTIQUE ET LES PSEUDO-LOIS DE PROBABILITÉ

29. — Les opérateurs fondamentaux de la mécanique quantique.

Nous nous bornerons à l'étude d'un corpuscule cartésien dépourvu de spin, et défini par n coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans l'espace Ω à n dimensions. La mécanique quantique associée à ce corpuscule, qui est le « point matériel » quantique, un certain nombre de variables aléatoires par l'intermédiaire d'opérateurs linéaires différentiels d'un même espace hilbertien $\mathcal{E}$. L'espace $\mathcal{E}$ est l'espace des fonctions de carré sommable des n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. A toute grandeur mesurable C , on associe un opérateur linéaire C de $\mathcal{E}$. Pour transformer cette grandeur en une variable aléatoire, il suffit d'introduire un vecteur unitaire $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi(x)$ de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire une fonction complexe telle que :

$$\int_{\Omega} |\psi(x)|^2 dx = 1, \quad dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

C'est le vecteur *état* du corpuscule, ou *fonction d'onde*. Il varie en fonction du temps, mais, pour commencer, sa variation ne nous intéressera pas, et nous ne nous occuperons pas pour le moment de la variable t . Conformément à la théorie du chapitre III, la variable aléatoire C a pour *fonction caractéristique* :

$$\varphi(\alpha) = (e^{i\alpha C} \psi, \psi) = \int_{\Omega} \psi^* e^{i\alpha C} \psi dx.$$

L'expression de $\varphi(\alpha)$ permet de calculer les valeurs de C , c'est-à-dire les divers résultats possibles d'une mesure de C faite sur le corpuscule dans un état donné, et les probabilités correspondantes, c'est-à-dire les fréquences limites d'apparition de ces valeurs au cours d'un ensemble de mesures. Remarquons que $\varphi(\alpha)$, qui est une *valeur moyenne*, contient cependant tous les éléments de prévision statistiques relatifs à la grandeur C .

Les opérateurs fondamentaux de la mécanique quantique sont intimement liés au *groupe des déplacements* de Ω , par rapport auquel la mécanique quantique (non relativiste) est invariante.

Écrivons les équations de ce groupe sous la forme :

$$x'_i = \xi_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

avec :

$$\sum_i a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}.$$

La transformation identique est obtenue pour $\xi_i = 0$, $a_{ik} = \delta_{ik}$. On a donc une transformation infiniment voisine de la transformation identique en considérant les quantités ξ_i et :

$$\varepsilon_{ik} = a_{ik} - \delta_{ik},$$

comme infiniment petites. Les relations d'orthogonalité montrent que :

$$\varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{lk}, \quad \varepsilon_{ii} = 0.$$

On a donc :

$$x'_i = x_i + \xi_i + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ik} x_k,$$

la matrice ε_{ik} étant antisymétrique.

Cette transformation fait subir à une fonction $\psi(x)$ la variation :

$$\delta\psi = \psi(x'_i) - \psi(x_i) = \left[\sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} \left(x_l \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right] \psi.$$

Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_i}$ définissent la *transformation infinitésimale* du sous-groupe des translations, et les opérateurs $x_l \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_l}$ la transformation infinitésimale du sous-groupe des rotations.

A la variable aléatoire *vitesse*, ou plus exactement *impulsion* (ces deux grandeurs se confondent pour un corpuscule non relativiste, de masse unité, mais il est plus correct, en mécanique quantique, de dire « impulsion »), la mécanique quantique fait correspondre le groupe unitaire des déplacements dans Ω ou, ce qui revient au même, l'opérateur ayant pour composantes, à un facteur imaginaire pur près, les $\frac{\partial}{\partial x_i}$. On pose :

$$p_i = -\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

h étant une constante universelle.

A la variable *moment d'impulsion*, dont nous désignerons les composantes par ω_{kl} , on fait correspondre le groupe unitaire des rotations de Ω , et l'opérateur M_{kl} correspondant en est, à un facteur imaginaire pur près, la transformation infinitésimale :

$$M_{kl} = \frac{h}{i} \left(x_k \frac{\partial}{\partial x_l} - x_l \frac{\partial}{\partial x_k} \right).$$

Les *opérateurs* M_{kl} sont d'ailleurs reliés aux *opérateurs* p_i par les relations :

$$M_{kl} = x_l p_k - x_k p_l,$$

qui, en mécanique classique ou aléatoire, relie les *grandeurs* (certaines ou aléatoires) vitesse et moment cinétique.

On vérifie que ces opérateurs sont self adjoints.

En résumé :

1° Les grandeurs fondamentales de la mécanique quantique sont des variables aléatoires. On les construit à l'aide d'un espace hilbertien $\mathcal{E}$, d'un vecteur unitaire ψ de $\mathcal{E}$, et d'opérateurs self adjoints;

2° A la composante X_i de position du corpuscule correspond l'opérateur de multiplication par x_i .

A la composante U_i d'impulsion du corpuscule correspond l'opérateur $p_i = -\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Au moment cinétique du corpuscule correspondent les opérateurs $M_{kl} = x_l p_k - x_k p_l$.

Les opérateurs définis ci-dessus ont une forme indépendante de la nature particulière du corpuscule étudié. Si l'on particularise le corpuscule en le supposant soumis à l'action d'un champ de forces dépendant du potentiel $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, on introduit encore l'opérateur *énergie* qui se déduit des *opérateurs* vitesse et potentiel par la règle de la mécanique classique :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_k^2 + V(x, t) = -\frac{h^2}{2} \Delta + V,$$

Δ étant l'opérateur laplacien.

Il est important de rechercher ceux de ces opérateurs qui commutent. Le résultat se lit dans le tableau suivant :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_k x_l - x_l x_k = 0; \\ p_k p_l - p_l p_k = 0; \\ \left\{ \begin{array}{l} x_k p_l - x_l p_k = 0 \quad (l \neq k); \\ x_k p_k - p_k x_k = \frac{h}{i}; \end{array} \right. \\ H x_k - x_k H = -\frac{h}{i} p_k; \\ H p_k - p_k H = \frac{h}{i} \frac{\partial V}{\partial x_k}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{kl} M_{ij} - M_{ij} M_{kl} = 0; \\ M_{kl} M_{lj} - M_{lj} M_{kl} = \frac{h}{i} M_{kj}; \\ \left\{ \begin{array}{l} x_j M_{jl} - M_{jl} x_j = \frac{h}{i} x_l; \\ x_l M_{kl} - M_{kl} x_j = 0; \end{array} \right. \\ H M_{kl} - M_{kl} H = \frac{h}{i} \left(x_l \frac{\partial V}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial V}{\partial x_l} \right); \\ \left\{ \begin{array}{l} p_j M_{kl} - M_{kl} p_j = 0; \\ p_j M_{jl} - M_{jl} p_j = \frac{h}{i} p_j; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

30. — Lois de probabilité fondamentale en mécanique quantique [1-45]. Position. Impulsion.

Le tableau ci-dessus montre que la mécanique quantique permet de déterminer les lois de probabilité d'un certain nombre de systèmes de variables aléatoires formées à partir des X et des U .

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux ensembles suivants :

- 1° Système $X_1, X_2, \dots, X_n$ (vecteur position);
- 2° Système $U_1, U_2, \dots, U_n$ (vecteur impulsion);
- 3° Système $X_1, \dots, X_k, U_{k+1}, \dots, U_n$ (et systèmes analogues);
- 4° ω_{kl} , composante isolée du moment cinétique;
- 5° H (en tenant compte du potentiel V).

Nous allons former rapidement les lois de probabilité de celles de ces variables aléatoires qui ne dépendent pas du potentiel, et dont, par conséquent, l'expression résulte uniquement de la fonction d'onde ψ , réservant l'étude de H à plus tard.

Vecteur position. — Sa fonction caractéristique est la moyenne attachée à l'opérateur de multiplication par :

$$e^{i \sum \alpha_k x_k},$$

soit :

$$\left(e^{i \sum \alpha_k x_k} \psi, \psi \right) = \int_{\Omega} \psi^* e^{i \sum \alpha_k x_k} \psi dx = \int_{\Omega} e^{i \sum \alpha_k x_k} |\psi|^2 dx.$$

La position a donc une densité de probabilité, égale à $|\psi|^2$. On en déduirait facilement la décomposition spectrale d'une coordonnée du corpuscule.

Vecteur impulsion. — L'opérateur unitaire :

$$e^{i \sum \alpha_k p_k},$$

correspond aux translations de Ω . Son effet sur $\psi(x)$, qui peut se déduire dans les cas élémentaires de l'application de la série de Taylor, est le suivant :

$$e^{i \sum \alpha_k p_k} \psi(x_k) = e^{-h \sum \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}} \psi(x_k) = \psi(x_k - h \alpha_k).$$

L'impulsion a donc pour fonction caractéristique :

$$(39) \quad [\psi(x - \alpha h), \psi(x)] = \int_{\Omega} \psi(x - \alpha h) \psi^*(x) dx = \int_{\Omega} \psi\left(x - \frac{h}{2} \alpha\right) \psi^*\left(x + \frac{h}{2} \alpha\right) dx.$$

Cette fonction caractéristique est l'inverse de Fourier d'une densité de probabilité $\rho_n(u)$.

Essayons en effet de calculer ρ_n . On doit avoir :

$$\rho_n(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i \sum u_k \alpha_k} \psi\left(x - \frac{h}{2} \alpha\right) \psi^*\left(x + \frac{h}{2} \alpha\right) dx d\alpha.$$

Faisons le changement de variables :

$$x_k - \frac{h}{2} \alpha_k = \lambda_k, \quad x_k + \frac{h}{2} \alpha_k = \mu_k,$$

$$\rho_n(u) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{\frac{i}{h} \sum u_k (\lambda_k - \mu_k)} \psi(\lambda) \psi^*(\mu) d\lambda d\mu,$$

$$(40) \quad = \frac{1}{(2\pi h)^n} \left| \int_{\Omega} e^{\frac{i}{h} \sum u_k x_k} \psi(x) dx \right|^2.$$

Introduisons la *transformation de Fourier* :

$$(41) \quad \mathfrak{F} \psi = \frac{1}{(2\pi h)^{\frac{n}{2}}} \int_{\Omega} e^{\frac{i}{h} \sum u_k x_k} \psi(x) dx.$$

Cette transformation fait passer d'un élément ψ de l'espace $\mathcal{E}$ à un autre élément $\mathfrak{F} \psi$, ces deux éléments ayant la même longueur. C'est une transformation unitaire de $\mathcal{E}$.

La densité de probabilité du vecteur impulsion est $|\mathfrak{F} \psi|^2$.

Distinguons bien cette transformation $\mathfrak{F}$, qui établit l'analogie et le parallèle entre la position et l'impulsion d'un corpuscule quantique, de la transformation de Fourier qui sert à définir la fonction caractéristique. La transformation $\mathfrak{F}$ porte sur les éléments de la réalisation fonctionnelle $\mathcal{E}$ de l'espace de Hilbert, qui est l'espace L^2 des *fonctions de carré sommable*. La transformation de Fourier du calcul des probabilités porte sur des densités de probabilité absolument sommables (et même positives), donc appartenant à L^1 . Elle conduit à des fonctions caractéristiques, fonctions de L^∞ . Les deux transformations jouent des rôles tout différents, et celui de $\mathfrak{F}$ est particulier à la mécanique quantique.

La fonction caractéristique du vecteur impulsion est la transformée de Fourier (non normée, avec nos notations), du carré du module de la transformée de Fourier $\mathfrak{F}$ (normée et tenant compte de h) de la fonction d'onde ψ . VON NEUMANN [45] emploie d'une façon courante en mécanique quantique la transformée de Fourier $\mathfrak{F}$. L'usage de la fonction caractéristique est plus récent.

Nous allons maintenant étudier rapidement les plus importantes lois de probabilité que fournissent les principes de la mécanique quantique, et où figurent en même temps des composantes de la position et de l'impulsion.

31. — Système de n variables aléatoires X ou U .

Choisissons k composantes de position, et appelons-les pour fixer les idées :

$$X_1, X_2, \dots, X_k;$$

associons-leur les $n - k$ composantes d'impulsion qui correspondent aux indices non encore employés, soit :

$$U_{k+1}, U_{k+2}, \dots, U_n.$$

Les opérateurs correspondants commutent deux à deux dans $\mathcal{E}$. On peut donc construire la loi de probabilité du système de variables aléatoires $X_1, \dots, U_n$. Sa fonction caractéristique résulte de l'étude de l'opérateur :

$$e^{i(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} p_{k+1} + \dots + \alpha_n p_n)} = e^{i \sum_1^k \alpha_j x_j - h \sum_{k+1}^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \int \psi^*(x) e^{i \sum_1^k \alpha_j x_j - h \sum_{k+1}^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}} \psi(x) dx \\ &= \int e^{i \sum_1^k \alpha_j x_j} \psi^*(x) \psi(x_1, \dots, x_k, x_{k+1} - h \alpha_{k+1}, \dots, x_n - h \alpha_n) dx, \end{aligned}$$

ou encore :

$$(42) \quad \varphi(\alpha) = \int e^{i \sum_1^k \alpha_j x_j} \psi\left(x_1, \dots, x_k, x_{k+1} - \frac{h}{2} \alpha_{k+1}, \dots, x_n - \frac{h}{2} \alpha_n\right) \psi^*\left(x_1, \dots, x_k, x_{k+1} + \frac{h}{2} \alpha_{k+1}, \dots, x_n + \frac{h}{2} \alpha_n\right) dx.$$

Cette fonction caractéristique est l'inverse de Fourier d'une *densité de probabilité* qui s'écrit :

$$p_{n-k} = \frac{1}{(2\pi)^{n-k}} \int e^{-i \sum_{k+1}^n u_j \alpha_j} \psi\left(x_1, \dots, x_k, x_{k+1} - \frac{h}{2} \alpha_{k+1}, \dots, x_n - \frac{h}{2} \alpha_n\right) \psi^*\left(x_1, \dots, x_k, x_{k+1} + \frac{h}{2} \alpha_{k+1}, \dots, x_n + \frac{h}{2} \alpha_n\right) dx_{k+1} \dots dx_n.$$

Faisons en effet le changement de variables :

$$x_j - \alpha_j \frac{h}{2} = \lambda_j, \quad x_j + \alpha_j \frac{h}{2} = \mu_j, \quad j = k+1, \dots, n.$$

Alors :

$$p_{n-k} = \frac{1}{(2\pi h)^{n-k}} \int e^{-\frac{i}{h} \sum_{k+1}^n u_j (\mu_j - \lambda_j)} \psi(x_1, \dots, x_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) \psi^*(x_1, \dots, x_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n) d\lambda_{k+1} \dots d\mu_n.$$

Introduisons la transformée de Fourier simple :

$$(43) \quad \mathfrak{C}_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h} u_j x_j} \psi(x) dx_j,$$

l'intégration se faisant suivant l'unique variable x_j . Comme on peut écrire :

$$\varphi_{n-k} = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \right)^{n-k} \int e^{\frac{i}{h} \sum_{k+1}^n u_j \lambda_j} \psi(x_1, \dots, x_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) d\lambda_{k+1} \dots d\lambda_n \right|^2,$$

on voit, au changement de notation près, que :

$$(44) \quad \varphi_{n-k} = |\mathfrak{C}_{k+1} \mathfrak{C}_{k+2} \dots \mathfrak{C}_n \psi|^2.$$

En particulier, si l'on prend $k = 0$, on retrouve l'expression $|\mathfrak{C}\psi|^2$ de la densité de probabilité de $U_1, U_2, \dots, U_n$ en remarquant que :

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \dots \mathfrak{C}_n.$$

Naturellement les opérateurs $\mathfrak{C}_j$ commutent entre eux, et l'ordre des facteurs n'a pas à intervenir.

On vérifie sur la formule (44) que le système de variables aléatoires :

$$X_1, \dots, X_k, U_{k+1}, \dots, U_n,$$

possède une véritable *densité de probabilité positive*. L'un des avantages du formalisme de la mécanique quantique est justement de mettre en évidence le fait que les probabilités sont des grandeurs *positives*. Le moyen le plus simple pour y arriver est d'écrire un nombre positif sous forme du carré du module d'un nombre complexe, et, d'un point de vue plus général, d'écrire les densités de probabilité (fonctions de L^1) sous forme de carrés de fonctions de l'espace de Hilbert.

32. — Moment cinétique.

Contentons-nous d'étudier une composante isolée ω_{kl} de la variable aléatoire moment cinétique (ou moment d'impulsion), à laquelle correspond l'opérateur :

$$M_{kl} = x_l p_k - x_k p_l = -\frac{h}{i} \left(x_l \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_l} \right).$$

Introduisons les coordonnées polaires dans le plan des x_k, x_l en posant :

$$x_k = r \cos \theta, \quad x_l = r \sin \theta.$$

On a :

$$M_{kl} = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Supposons la fonction d'onde exprimée à l'aide des variables :

$$r, \theta, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_n,$$

et écrivons-la :

$$\psi(r, \theta, x_i),$$

l'indice i parcourant les valeurs l à n , k et l exceptés.

La fonction caractéristique de M_{kl} est la moyenne attachée à l'opérateur :

$$e^{i\alpha M_{kl}} = e^{\frac{\alpha h}{2\theta}},$$

soit :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \left(e^{\frac{\alpha h}{2\theta}} \psi, \psi \right) = [\psi(r, \theta + \alpha h, x_i), \psi], \\ &= \int \psi^*(r, \theta, x_i) \psi(r, \theta + \alpha h, x_i) r dr d\theta dx_i. \end{aligned}$$

ψ étant par rapport à θ une fonction périodique de période 2π , on peut remplacer cette intégrale par :

$$\varphi(\alpha) = \int \psi\left(r, \theta + \frac{h}{2}\alpha, x_i\right) \psi^*\left(r, \theta - \frac{h}{2}\alpha, x_i\right) r dr d\theta dx_i, \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Pour déduire de cette fonction caractéristique la loi de probabilité de ω_{kl} , on utilise le développement de ψ non plus en *intégrale de Fourier* (opérateurs $\mathfrak{C}_j$), mais en *série de Fourier* par rapport à θ .

Posons :

$$(45) \quad \psi(r, \theta, x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(r, x_i) e^{im\theta}.$$

Les coefficients $c_m(r, x_i)$ s'expriment inversement à l'aide de ψ par les formules :

$$c_m(r, x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \psi e^{im\theta} d\theta,$$

qui jouent le rôle, pour le moment cinétique, des transformations intégrales de Fourier $\mathfrak{C}$ pour l'impulsion.

En outre, d'après la formule de Parseval,

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 = \int_0^{2\pi} |\psi|^2 d\theta.$$

Avec ces notations,

$$\psi(r, \theta + h\alpha, x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(r, x_i) e^{im\theta} e^{imh\alpha},$$

et :

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imh\alpha} \int \psi^*(r, \theta, x_i) c_m(r, x_i) e^{im\theta} r dr d\theta dx_i.$$

Dans l'intégrale, on voit apparaître la quantité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \psi^* e^{im\theta} d\theta = c_m^*(r, x_i),$$

de sorte que :

$$(46) \quad \varphi(\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imh\alpha} \int |c_m(r, x_i)|^2 r dr dx_i,$$

l'intégrale étant étendue au domaine $r > 0$, $-\infty < x_i < \infty$.

$\varphi(\alpha)$ a bien la forme d'une fonction caractéristique. C'est une *série* de Fourier. On voit que la composante ω_{kl} du moment cinétique peut prendre les valeurs mh en progression arithmétique, avec les probabilités :

$$\int |c_m|^2 r dr dx_i,$$

dont la somme est bien égale à 1 d'après l'égalité de Parseval.

Remarque. — Bornons-nous pour simplifier les notations à un corpuscule à *deux dimensions*. Sa position et son impulsion jouent des rôles tout à fait symétriques. Ce corpuscule, ayant une position X et une impulsion U dans l'état ψ , est (dans une certaine mesure) équivalent à un corpuscule qui admettrait U pour position et X pour impulsion dans l'état $\mathfrak{C}\psi$. Or son moment cinétique s'exprime symétriquement par rapport aux X et aux U . On doit donc pouvoir en exprimer la loi de probabilité à l'aide du développement en série de Fourier de $\mathfrak{C}\psi$. Nous avons posé :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(r) e^{im\theta}.$$

Posons de même :

$$\mathfrak{C}\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m(r) e^{im\theta}, \quad \text{avec} \quad \mathfrak{C}\psi = \frac{1}{2\pi h} \int e^{\frac{i}{h}(u_1 x_1 + u_2 x_2)} \psi dx_1 dx_2.$$

Le problème est d'exprimer les probabilités relatives à ω_{12} en fonction des γ_m , et d'établir les relations qui existent entre les $\gamma_m(r)$ et les $c_m(r)$.

Pour cela, posons comme ci-dessus :

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

et aussi :

$$u_1 = r' \cos \theta', \quad u_2 = r' \sin \theta',$$

$$\mathfrak{C} \psi = \frac{1}{2\pi h} \int e^{\frac{i}{h} r r' \cos(\theta - \theta')} \psi(r, \theta) r dr d\theta.$$

Posons enfin :

$$\theta - \theta' = \frac{\pi}{2} - \lambda.$$

L'intervalle de variation de θ est toujours de 2π , son origine est arbitraire, par exemple $-\pi$:

$$\mathfrak{C} \psi = \frac{1}{2\pi h} \int e^{\frac{i}{h} r r' \sin \lambda} \psi\left(n, \theta' + \frac{\pi}{2} - \lambda\right) r dr d\lambda.$$

Or :

$$\psi\left(n, \theta' + \frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(r) e^{im\frac{\pi}{2}} e^{im\theta'} e^{-im\lambda}.$$

Donc :

$$\mathfrak{C} \psi = \frac{1}{2\pi h \sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\frac{\pi}{2}} e^{im\theta'} \int_0^{\infty} c_m(r) r dr \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{i}{h} r r' \sin \lambda - im\lambda} d\lambda.$$

Introduisons la fonction de Bessel J_m d'ordre m , définie par :

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \lambda - im\lambda} d\lambda.$$

Nous voyons que :

$$\mathfrak{C} \psi = \frac{1}{h \sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\frac{\pi}{2}} e^{im\theta'} \int_0^{\infty} c_m(r) J_m\left(\frac{r r'}{h}\right) r dr.$$

Ceci nous montre, par comparaison avec le développement :

$$\mathfrak{C} \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m(r') e^{im\theta'}$$

(écrit dans le système de variables $u_1 = r' \cos \theta'$, $u_2 = r' \sin \theta'$), que :

$$(47) \quad \gamma_m(r') = \frac{1}{h} e^{im\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} c_m(r) J_m\left(\frac{r r'}{h}\right) r dr.$$

Exprimons maintenant la probabilité de la valeur mh de ω_{12} à l'aide des γ_m . Nous allons vérifier, ce qui est presque intuitif, qu'elle est à la fois égale à :

$$\int_0^{\infty} |c_m(r)|^2 r dr, \quad \text{et à} \quad \int_0^{\infty} |\gamma_m(r')|^2 r' dr'.$$

Pour démontrer cette propriété des fonctions de Bessel, nous allons établir que ω_{12} admet la même fonction caractéristique dans les états ψ et $\mathfrak{C}\psi$. Posons :

$$U_\alpha = e^{i\alpha M_{12}} = e^{\frac{\alpha h}{2\hbar}}.$$

L'effet du groupe d'opérateurs unitaires U_α est, dans l'espace Ω , équivalent à une rotation d'angle αh :

$$U_\alpha \psi(r, \theta) = \psi(r, \theta + \alpha h).$$

Dans l'état ψ , ω_{12} a pour fonction caractéristique :

$$(U_\alpha \psi, \psi),$$

et, dans l'état $\mathfrak{C}\psi$,

$$(U_\alpha \mathfrak{C}\psi, \mathfrak{C}\psi).$$

Si l'on montre que $U_\alpha \mathfrak{C} = \mathfrak{C} U_\alpha$, c'est-à-dire que $\mathfrak{C}$ commute avec U_α , on pourra écrire :

$$(U_\alpha \mathfrak{C}\psi, \mathfrak{C}\psi) = (\mathfrak{C} U_\alpha \psi, \mathfrak{C}\psi) = (U_\alpha \psi, \psi),$$

et le théorème sera démontré. Or, en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} U_\alpha \mathfrak{C}\psi &= U_\alpha \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar} rr' \cos(\theta - \theta')} \psi(r, \theta) r dr d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar} rr' \cos(\theta - \alpha h - \theta')} \psi(r, \theta) r dr d\theta. \end{aligned}$$

Posons $\theta - \alpha h = \theta_1$:

$$U_\alpha \mathfrak{C}\psi = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar} rr' \cos(\theta_1 - \theta')} \psi(r, \theta_1 + \alpha h) r dr d\theta_1.$$

Mais :

$$\psi(r, \theta_1 + \alpha h) = U_\alpha \psi(r, \theta_1).$$

Donc :

$$U_\alpha \mathfrak{C}\psi = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar} rr' \cos(\theta_1 - \theta')} U_\alpha \psi(r, \theta_1) r dr d\theta_1 = \mathfrak{C} U_\alpha \psi,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ces résultats précisent bien la symétrie du formalisme quantique entre la position et l'impulsion.

33. — Relations d'incertitude et extensions diverses.

La mécanique quantique permet de calculer la loi de probabilité du système de deux variables aléatoires associées à deux opérateurs qui commutent dans l'espace $\mathfrak{E}$, et le résultat s'étend à un système quelconque d'opérateurs qui commutent deux à

deux. Si deux opérateurs A et B ne commutent pas, on ne peut plus rien dire. L'opérateur :

$$e^{i(\alpha A + \beta B)}$$

a un sens, bien qu'il ne soit pas égal au produit des opérateurs $e^{i\alpha A}$ et $e^{i\beta B}$, qui n'est pas commutatif. Mais la fonction :

$$\varphi(\alpha, \beta) = [e^{i(\alpha A + \beta B)} \psi, \psi]$$

n'est pas une vraie fonction caractéristique, car elle n'est pas nécessairement du type positif. Si la loi de probabilité du couple A, B existe, $\varphi(\alpha, \beta)$ n'en est pas la fonction caractéristique.

Il existe cependant certaines relations entre les variables aléatoires A et B. Les plus simples sont les *relations d'incertitude*, qu'il faut *rappeler* ici. Elles concernent deux opérateurs tels que :

$$BA - AB = im,$$

m étant un nombre réel.

λ étant un nombre réel, on forme l'opérateur $\lambda A + iB$, on l'applique à un vecteur unitaire ψ , et l'on prend le carré scalaire du résultat. C'est un nombre positif :

$$\|(\lambda A + iB) \psi\|^2 = [(\lambda A + iB) \psi, (\lambda A + iB) \psi] \geq 0,$$

soit :

$$\lambda^2 (A \psi, A \psi) + i \lambda [(A \psi, B \psi) - (B \psi, A \psi)] + (B \psi, B \psi) \geq 0.$$

Comme A et B sont self adjoints,

$$(A \psi, B \psi) = (BA \psi, \psi),$$

$$(B \psi, A \psi) = (AB \psi, \psi).$$

On a donc :

$$(A \psi, B \psi) - (B \psi, A \psi) = [(BA - AB) \psi, \psi] = im (\psi, \psi) = im.$$

$$\lambda^2 \|A \psi\|^2 - m \lambda + \|B \psi\|^2 \geq 0.$$

Ce trinôme en λ étant positif, son discriminant est négatif :

$$\|A \psi\| \cdot \|B \psi\| \geq \frac{|m|}{2}.$$

Or on a vu que $\|A \psi\|^2$ est le moment d'ordre 2 de A. Par suite :

$$\sqrt{\overline{A^2}} \sqrt{\overline{B^2}} \geq \frac{|m|}{2}.$$

On peut, par exemple, supposer que les variables aléatoires A et B ont des valeurs moyennes nulles, quitte à remplacer les opérateurs A et B par $A - \bar{A}$ et $B - \bar{B}$. On voit que le produit des écarts types de A et B est supérieur à un nombre positif précis $\frac{|m|}{2}$. Si, en particulier $\sqrt{\overline{A^2}} \rightarrow 0$, $\sqrt{\overline{B^2}} \rightarrow \infty$. Dire que $\sqrt{\overline{A^2}} \rightarrow 0$, c'est dire que la grandeur A

cesse d'être aléatoire, et ne peut plus prendre que la valeur déterminée 0. Alors la dispersion de B devient infinie.

La mécanique quantique *interprète* ces résultats de la façon suivante : si l'on fait une mesure de la grandeur A, on trouve une certaine valeur, prélevée parmi les valeurs propres de A. A ce moment précis, la variable A cesse d'être aléatoire et sa dispersion s'annule. Mais, en même temps, la *dispersion* de B devient infinie, et il est impossible, par la même mesure, d'assigner à B une valeur précise. A et B « ne sont pas simultanément mesurables ». La mesure modifie l'état du corpuscule. La fonction d'onde après la mesure est égale à la fonction propre de A correspondant à la valeur propre choisie (au moins si cette valeur propre est simple).

Elle évolue ensuite suivant une loi déterminée, et l'on peut mesurer B. Mais la mesure porte sur le corpuscule dans l'état modifié par la mesure de A. Ce sont deux opérations successives portant en somme sur deux corpuscules distincts. Et si l'on ne peut pas mesurer simultanément A et B, on ne peut pas concevoir l'existence de probabilités conjuguées pour le système de variables aléatoires A, B. C'est ce qui se passe par exemple pour une composante de la vitesse et pour la coordonnée de même rang.

Cette conclusion ne fait aucun doute (1), en tant qu'elle résulte des principes de la mécanique quantique et de l'état actuel de nos conceptions sur la mesure en physique. On peut cependant se poser la question suivante : la mécanique quantique fournit un certain nombre de lois de probabilité (qui conduisent à des conclusions diverses, entre autres les relations d'incertitude). Ces lois sont-elles mathématiquement compatibles avec des lois de probabilité complètes, satisfaisant à toutes les exigences du calcul des probabilités, ou au contraire présentent-elles certaines contradictions fondamentales ?

(1) A cela près qu'il existe des lois de probabilité, c'est-à-dire des statistiques, parfaitement définies, tout en ayant une dispersion infinie.

Supposons, par exemple, que X ait pour densité de probabilité :

$$\varphi(x) = \mu(\sigma) \frac{e^{-\sigma x^2}}{1+x^2}.$$

σ étant une certaine fonction de t et $\mu(\sigma)$ une quantité définie par la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1,$$

qui donne :

$$\frac{1}{\mu(\sigma)} = 2\sqrt{\pi} e^{\sigma} \int_{\sqrt{\sigma}}^{\infty} e^{-s^2} ds.$$

On voit que $\overline{X} = 0$. $\overline{X^2}$ a pour valeur :

$$\overline{X^2} = \sqrt{\pi} \frac{\mu(\sigma)}{\sqrt{\sigma}} - 1.$$

Si, au cours du temps, $\sigma \rightarrow 0$, $\overline{X^2} \rightarrow \infty$, et si $\sigma \rightarrow \infty$, $\overline{X^2} \rightarrow 0$. On peut choisir pour σ une fonction du temps telle que ces deux éventualités puissent se produire à des instants t finis.

Considérons alors un corpuscule qui ait pour fonction d'onde :

$$\psi = \sqrt{\mu(\sigma)} \frac{e^{-\frac{\sigma}{2}x^2}}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\frac{i}{h}b(x,t)}.$$

Il est possible de déterminer la phase $b(x, t)$ et d'en déduire la forme du potentiel $V(x, t)$ qui est compatible avec la fonction ψ ainsi constituée.

Si $\sigma \rightarrow 0$, $\mu(\sigma) \rightarrow \frac{1}{\pi}$, et $\varphi(x) \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$. C'est la densité de probabilité de la loi de Cauchy. A ce moment $\overline{X^2} = \infty$ et, par suite des relations d'incertitude, l'impulsion du corpuscule défini par l'état ψ dégénère (provisoirement) en une variable non aléatoire, bien déterminée, prenant une seule valeur avec la probabilité 1. Mais que

Nous étudierons ce problème dans les paragraphes qui suivent. Avant de l'entamer, faisons encore quelques remarques sur le rôle de l'inégalité de Schwarz, qui nous a servi à démontrer les relations d'incertitude.

Si d'abord on a :

$$BA - AB = iC,$$

C étant un opérateur quelconque, on peut écrire :

$$\lambda^2 \|A\psi\|^2 - \lambda (C\psi, \psi) - \|B\psi\|^2 \geq 0,$$

c'est-à-dire, en langage statistique :

$$\left(\frac{C}{\lambda}\right)^2 \leq A^2 \cdot B^2.$$

Par exemple,

$$\frac{h^2}{4} (X_3)^2 \leq \omega_{23}^2 X_2^2.$$

Si A et B commutent, on obtient seulement l'inégalité banale :

$$A^2 \cdot B^2 \geq 0.$$

Mais, si l'on remplace le nombre réel λ par un imaginaire pur, c'est-à-dire plutôt si l'on considère l'opérateur $\lambda A + B$, où λ est réel, on a :

$$\|(\lambda A + B)\psi\|^2 = \lambda^2 \|A\psi\|^2 + \lambda (A\psi, B\psi) + \lambda (B\psi, A\psi) + \|B\psi\|^2 \geq 0.$$

Or :

$$(A\psi, B\psi) + (B\psi, A\psi) = (AB\psi, \psi) + (BA\psi, \psi) = 2 (AB\psi, \psi),$$

puisque A et B commutent. C'est la valeur moyenne du produit AB, qui est ici bien définie.

On trouve alors :

$$(\overline{AB})^2 \leq \overline{A^2} \cdot \overline{B^2}.$$

C'est l'inégalité de Schwarz classique du calcul des probabilités.

Les relations d'incertitude remplacent cette inégalité lorsque la quantité $\overline{AB}$ n'est pas définie, mais elles n'ont pas la même signification.

la dispersion de la position soit alors infinie, cela n'implique pas que la position ne soit pas « mesurable ». Elle reste aléatoire, avec une densité de probabilité bien définie, dont la seule particularité est de ne plus avoir de moments. Sa statistique a toujours un sens précis. L'opération statistique de mesure, telle que la conçoit la mécanique quantique, ne semble donc pas incompatible avec la notion de dispersion infinie. Tout repose en réalité sur la définition du mot « mesure », et sur une assimilation peut-être trop complète entre l'acte de *mesure* quantique et l'épreuve statique classique.

Les choses se passeraient d'une façon toute différente si l'on prenait l'exemple de :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma x^2},$$

car, lorsque $\sigma \rightarrow 0$, X^2 augmente bien indéfiniment, mais $\varphi(x)$ n'a pas de forme limite précise.

Donnons, à titre d'exemple, une application de l'inégalité de Schwarz au moment cinétique.

On a :

$$M_{12} = x_2 p_1 - x_1 p_2,$$

λ étant réel,

$$(i x_1 + p_2) \psi^2 = 0, \quad (i x_2 - p_1) \psi^2 \geq 0.$$

x_1 et p_2 commutent, ainsi que x_2 et p_1 . Donc :

$$\begin{cases} \lambda^2 (x_1^2 \psi, \psi) + 2 \lambda (x_1 p_2 \psi, \psi) + (p_2^2 \psi, \psi) \geq 0, \\ \lambda^2 (x_2^2 \psi, \psi) - 2 \lambda (x_2 p_1 \psi, \psi) + (p_1^2 \psi, \psi) \geq 0. \end{cases}$$

Ces deux inégalités conduisent d'abord aux inégalités évidentes :

$$(X_1 \bar{U}_2)^2 \leq \bar{X}_1^2 \cdot \bar{U}_2^2, \quad (X_2 \bar{U}_1)^2 \leq \bar{X}_2^2 \cdot \bar{U}_1^2.$$

Maintenant, ajoutons-les membre à membre :

$$\lambda^2 [(x_1^2 + x_2^2) \psi, \psi] + 2 \lambda [(x_1 p_2 - x_2 p_1) \psi, \psi] + [(p_1^2 + p_2^2) \psi, \psi] \geq 0,$$

ou :

$$\lambda^2 [(x_1^2 + x_2^2) \psi, \psi] + 2 \lambda [M_{12} \psi, \psi] + [(p_1^2 + p_2^2) \psi, \psi] \geq 0.$$

En termes statistiques,

$$(\overline{M_{12}})^2 \leq (\overline{X_1^2 + X_2^2}) \cdot (\overline{U_1^2 + U_2^2}).$$

Cette inégalité est la même que celle que l'on démontrerait en calcul des probabilités pour les variables aléatoires X_1 , X_2 , U_1 , U_2 et $\omega_{12} = X_2 U_1 - X_1 U_2$. Elle est alors une forme particulière de l'inégalité de Lagrange, elle-même cas particulier de l'inégalité de Schwarz. On la démontre très simplement en considérant ω_{12} comme la partie réelle du produit algébrique $(X_1 + i X_2)(U_1 + i U_2)$ et en formant l'expression :

$$X_1 + i X_2 + \lambda (U_1 + i U_2)^2.$$

Mais cette inégalité n'entraîne pas, à elle seule, que la variable aléatoire ω_{12} associée à l'opérateur $M_{12} = x_2 p_1 - x_1 p_2$ se déduise des variables X_1 , X_2 , U_1 , U_2 par la combinaison fonctionnelle $\omega_{12} = X_2 U_1 - X_1 U_2$.

Nous verrons bientôt que cette conclusion ne serait pas exacte.

34. — Étude du système de variables aléatoires position-impulsion.

Les principes de la mécanique quantique fournissent un certain nombre de lois de probabilité. Il en est un certain nombre d'autres qu'ils sont impuissants à former. La mécanique quantique ne connaît en effet la loi de probabilité d'un système de variables aléatoires que lorsque les opérateurs correspondants commutent deux à deux dans l'espace à commun. Que cette loi soit inconnue, et inaccessible aux expériences dans l'état actuel de la physique, cela n'implique pas nécessairement *a priori* qu'elle n'existe pas, au sens du calcul des probabilités. Tout ce que l'on peut dire, c'est que,

d'après la conception que l'on se fait aujourd'hui de l'opération de mesure à l'échelle ultime de la matière, une telle loi n'a aucun sens physique, et que, d'autre part, la mécanique quantique, *en accord avec cette conception*, ne la fournit pas.

Le problème général qui se pose est le suivant. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n, U_1, U_2, \dots, U_n$ sont associées à des opérateurs. Par des combinaisons algébriques sur ces opérateurs, on forme d'autres opérateurs (moment cinétique, énergie, ...) auxquels on associe des grandeurs mesurables, qui sont des variables aléatoires. Est-il possible de les déduire des variables aléatoires X_i, U_i , par les mêmes combinaisons algébriques que celles qui existent entre les opérateurs, en respectant les bases du calcul des probabilités classiques et celles des lois de probabilité que la mécanique quantique fournit ? Si cela ne se peut pas, existe-t-il cependant des analogies entre le formalisme quantique et celui du calcul des probabilités ?

Considérons d'abord la projection du mouvement du corpuscule sur l'axe x_1 .

Nous connaissons la loi de probabilité de la position X_1 et celle de l'impulsion U_1 . Elles sont toutes les deux absolument continues. U_1 correspond à l'opérateur :

$$p_1 = -\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

A l'opérateur :

$$a = x_1^2 + p_1^2$$

correspond une certaine variable aléatoire A. Si le problème posé est possible, cette variable aléatoire peut s'écrire :

$$A = X_1^2 + U_1^2.$$

Cherchons les valeurs possibles de A, c'est-à-dire les valeurs propres de a . Comme :

$$a = x_1^2 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2},$$

ce sont les valeurs de a pour lesquelles l'équation différentielle :

$$x_1^2 \psi - h^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = a \psi,$$

admet une solution ψ de carré sommable entre $-\infty$ et $+\infty$.

La résolution de ce problème est bien connue. Elle est équivalente à la recherche des valeurs propres de l'énergie de l'oscillateur harmonique. On sait que a est de la forme :

$$a = (2n + 1) h^2.$$

La variable aléatoire A possède un spectre *discret*.

Ce résultat n'est pas incompatible avec le fait que les lois de probabilité individuelles de X_1 et de U_1 soient *absolument continues*. Aussi allons-nous maintenant considérer la projection du mouvement sur le plan des x_1, x_2 .

Aux opérateurs :

$$x_1^2 + p_1^2, \quad x_2^2 + p_2^2, \quad x_1 p_2 - x_2 p_1,$$

essayons de faire correspondre les variables aléatoires :

$$A = X_1^2 + U_1^2, \quad B = X_2^2 + U_2^2, \quad \omega_{12} = X_2 U_1 - X_1 U_2.$$

Leurs valeurs possibles sont de la forme :

$$A = (2m + 1)h^2, \quad B = (2p + 1)h^2, \quad \omega_{12} = qh,$$

m, p, q étant trois entiers aléatoires.

Supposons que U_1 prenne une valeur déterminée u_1 , d'ailleurs arbitraire, ce qui est possible parce que la loi de probabilité de U_1 est absolument continue. Étudions les lois de probabilité liées pour $U_1 = u_1$. L'équation :

$$x_1^2 + u_1^2 = (2m + 1)h^2,$$

fixe une série de valeurs discrètes de x_1 . Les équations :

$$x_2^2 + u_2^2 = (2p + 1)h^2, \quad x_2 u_1 - x_1 u_2 = qh,$$

permettent enfin de calculer les valeurs de x_2, u_2 , qui sont dénombrables.

Ainsi lorsqu'on fixe u_1 , les trois variables x_2, u_1 et u_2 ne peuvent prendre qu'une suite dénombrable de valeurs. Or, la loi de probabilité de u_1, x_2 est absolument continue, ainsi que celle de u_1, u_2 . Si l'on se fixe u_1 , on peut donc obtenir soit pour x_2 , soit pour u_2 , n'importe quelle valeur avec une probabilité non nulle (ou des valeurs comprises dans un intervalle quelconque, si petit qu'il soit).

On aboutit donc à une contradiction.

CONCLUSION. — Si, entre des opérateurs qui ne commutent pas deux à deux, on établit une relation algébrique, il n'existe en général aucune relation fonctionnelle analogue entre les variables aléatoires qui sont attachées à ces opérateurs. On obtient une nouvelle variable aléatoire qui n'est liée aux variables composantes que par une dépendance stochastique.

Par exemple, le moment cinétique, en projection sur une direction, ne peut se déduire sûrement de la position et de l'impulsion du corpuscule. Ce résultat est évident si l'on rejette l'existence de la loi de probabilité du système position-impulsion. Mais la mécanique quantique ne démontre pas ce résultat. Elle est seulement impuissante à déduire la loi de probabilité en question de la théorie des opérateurs. Si donc il existe une loi de probabilité à $2n$ variables pour le système position-impulsion, elle ne contient cependant pas la loi de probabilité du moment cinétique, et il existe une loi de probabilité à

$$2n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2},$$

variables pour le système position-impulsion-moment cinétique.

Ce résultat s'applique aussi en particulier à l'énergie.

Remarque. — Considérons seulement les $2n$ variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n, U_1, U_2, \dots, U_n$ et formons le tableau :

$$\begin{array}{c} X_1, X_2, \dots, X_n, \\ U_1, U_2, \dots, U_n. \end{array}$$

Nous connaissons la loi de probabilité d'un système quelconque de n variables d'indice différent (colonnes différentes) tirées de ce tableau, ces variables étant prélevées indifféremment dans la première ligne ou dans la seconde. Les lois de probabilité que l'on peut ainsi former, et dont le nombre est égal à 2^n , se permutent entre elles lorsqu'on permute les variables qui y figurent, à condition de permuter en même temps ψ avec l'une convenable de ses transformées de Fourier, obtenue par une multiplication convenable d'un certain nombre des opérateurs $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$.

On peut se poser la question suivante :

Les 2^n lois de probabilités ainsi formées peuvent-elles se déduire, par application du théorème des probabilités totales, et *indépendamment des principes physiques* de la mécanique quantique, d'une loi de probabilité relative aux $2n$ variables $X_1, X_2, \dots, X_n, U_1, U_2, \dots, U_n$? Autrement dit, *sont-elles compatibles du point de vue du calcul des probabilités classiques* ?

La réponse est affirmative et banale pour un corpuscule à une seule dimension. On connaît, en effet, la loi de probabilité de X et celle de U , et l'on cherche la loi de probabilité du système (X, U) . On peut, *par exemple*, supposer X et U stochastiquement indépendantes. Le système (X, U) admet alors une densité de probabilité qui est le produit de celles de X et de U . Cette indépendance est parfaitement compatible avec les relations d'incertitude.

Dès qu'il y a plus d'une dimension, le problème se complique. A deux dimensions, on se donne les lois de probabilité des couples $(X_1, X_2), (X_1, U_2), (X_2, U_1), (U_1, U_2)$ et l'on cherche s'il existe une loi de probabilité pour le système (X_1, X_2, U_1, U_2) qui soit compatible avec ces quatre lois de probabilité. D'une façon générale, si l'on essaie d'utiliser les considérations des paragraphes 22 et 27, on est conduit à se placer dans un espace $\mathcal{H}$ plus large que $\mathcal{E}$. Le problème, initialement posé dans le langage du calcul des probabilités, peut se traduire en mécanique dans les termes suivants :

Est-il possible de trouver deux corpuscules (en interaction) tels que, si l'on appelle $X_1, X_2, \dots, X_n$ les composantes de position du premier, et $U_1, U_2, \dots, U_n$ les composantes d'impulsion du second, les 2^n lois de probabilité d'un système de n variables aléatoires d'indices différents prélevées parmi les 2^n variables $X_1, \dots, U_n$ soient les mêmes que celles de ces mêmes variables lorsque, changeant leur signification, on les considère comme les composantes de position et d'impulsion d'un unique corpuscule dans l'état ψ donné ?

Il est facile de mettre ce problème en équations, mais il ne semble pas qu'il ait jamais été résolu. On ignore s'il a des solutions. On en connaît cependant, comme nous allons le montrer, une solution *formelle*. On sait construire une fonction f qui soit à la fois compatible avec les principes de la mécanique quantique et le théorème des probabilités totales et qui joue le rôle de densité de probabilité pour le système des X_i, U_i . Mais cette fonction n'est pas une vraie densité de probabilité, car elle n'est pas nécessairement positive. Nous dirons que c'est une *pseudo-densité de probabilité*. Elle a été

introduite pour la première fois par WIGNER [49] qui semble l'avoir déduite de considérations de symétrie, sans l'avoir vraiment démontrée. L'objet des paragraphes qui suivent est de démontrer, de discuter et d'appliquer la formule de Wigner.

35. — Étude de l'opérateur e^{A+B} [8].

Si A et B ne commutent pas, la moyenne :

$$\varphi(\alpha, \beta) = [e^{i(\alpha A + \beta B)} \psi, \psi],$$

attachée à l'opérateur $e^{i(\alpha A + \beta B)}$ n'est pas nécessairement une fonction caractéristique. Elle existe cependant, et est bien déterminée. Nous allons en faire l'étude, dans le cas particulier où :

$$BA - AB = im, \quad m, \text{ nombre réel.}$$

Nous passerons d'abord par l'intermédiaire des développements en série. Au lieu de l'opérateur $e^{i(\alpha A + \beta B)}$, il suffit d'ailleurs de considérer l'opérateur schématique :

$$e^{A+B},$$

qui s'écrit par définition :

$$1 + A + B + \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \dots$$

Il s'agit de donner une règle de calcul de l'opération e^{A+B} qui permette d'expliciter la forme de la fonction $e^{A+B} \psi$.

Désignons par Z un opérateur qui soit identique à la somme des opérateurs A et B, à cette différence essentielle près que, dans Z, nous convenons de *placer toujours B à droite*. Cela veut dire que Z^n se déduit de Z par la formule algébrique du binôme. Par exemple,

$$Z^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

alors que :

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Par suite :

$$(A + B)^2 = Z^2 + BA - AB = Z^2 + im.$$

Évaluons maintenant $(A + B)^n$, et pour cela, commençons par former $(A + B) Z^n$.

Comme :

$$Z^n = \sum_{p=0}^n C_n^p A^p B^{n-p},$$

il faut d'abord former :

$$(A + B) A^p B^{n-p} = A^{p+1} B^{n-p} + BA^p B^{n-p}.$$

Posons :

$$\lambda_p = BA^p.$$

On a successivement :

$$\begin{aligned}\lambda_p &= BAA^{p-1} = (AB + im) A^{p-1} = A \lambda_{p-1} + imA^{p-1}, \\ \lambda_{p-1} &= BAA^{p-2} = A \lambda_{p-2} + imA^{p-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_2 &= A \lambda_1 + imA, \\ \lambda_1 &= AB + im.\end{aligned}$$

Multiplions ces égalités à gauche par 1, A, A², ..., A^{p-1}, et ajoutons-les membre à membre : il reste (1) :

$$\lambda_p = BA^p = A^p B + impA^{p-1},$$

et par suite :

$$(A + B) A^p B^{n-p} = A^{p+1} B^{n-p} + A^p B^{n+1-p} + impA^{p-1} B^{n-p}.$$

Multiplions maintenant par C_n^p et sommons de p = 0 à n. Nous obtenons à gauche (A + B) Z. A droite, nous trouvons d'abord :

$$\sum C_n^p (A^{p+1} B^{n-p} + A^p B^{n+1-p}) = AZ^n + Z^n B.$$

Comme Zⁿ⁺¹ s'obtient en multipliant Zⁿ par A + B et en laissant constamment B à droite,

$$AZ^n + Z^n B = Z^{n+1}.$$

Ensuite :

$$im \sum p C_n^p A^{p-1} B^{n-p} = nZ^{n-1}.$$

Donc :

$$(48) \quad (A + B) Z^n = Z^{n+1} + imnZ^{n-1}.$$

Passons au calcul de (A + B)ⁿ en fonction de Z. On voit que :

$$\begin{aligned}A + B &= Z; \\ (A + B)^2 &= Z^2 + im; \\ (A + B)^3 &= (A + B) Z^2 + im (A + B) = Z^3 + 3 imZ; \\ (A + B)^4 &= (A + B) Z^3 + 3 im (A + B) Z = Z^4 + 6 imZ^3 + 3 (im)^2.\end{aligned}$$

On démontre facilement par récurrence que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2n)!} (A + B)^{2n} &= \frac{Z^{2n}}{(2n)!} + \dots + \frac{(im)^p}{2^p} \frac{Z^{2n-2p}}{p! (2n-2p)!} + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{im}{2}\right)^n, \\ \frac{1}{(2n+1)!} (A + B)^{2n+1} &= \frac{Z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots + \frac{(im)^p}{2^p} \frac{Z^{2n-2p+1}}{p! (2n-2p+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{im}{2}\right)^n Z.\end{aligned}$$

(1) Ce résultat peut aussi se déduire de la formule de Dirac Bf(A) — f(A)B = imf'(A), elle-même cas particulier de la formule :

$$g(B) f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(im)^k}{K!} f^{(k)}(A) g^{(k)}(B).$$

Tous les éléments sont maintenant rassemblés pour le calcul de e^{A+B} :

$$\begin{aligned}
 e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{im}{2}\right)^p \frac{1}{p!} \sum_{n=p}^{\infty} \left[\frac{Z^{2n-2p}}{(2n-2p)!} + \frac{Z^{2n-2p+1}}{(2n-2p+1)!} \right] \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{im}{2}\right)^p \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{Z^q}{q!} \\
 &= \left[\sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{im}{2}\right)^p \frac{1}{p!} \right] \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{Z^q}{q!} \right) \\
 &= e^{\frac{im}{2}} e^Z.
 \end{aligned}$$

Or $e^Z = e^{A+B}$, à condition qu'on opère toujours par rapport à B pour commencer.
Donc :

$$e^Z = e^A e^B,$$

et :

$$(49) \quad e^{A+B} = e^{\frac{im}{2} + A} e^B,$$

l'ordre des facteurs étant fixé.

Ce qui importe, c'est d'opérer d'abord complètement par rapport à l'un des opérateurs, puis complètement par rapport à l'autre. $e^A e^B$ n'est pas égal à e^{A+B} . Il y a un facteur complémentaire $e^{\frac{im}{2}}$.

36. — Application au système position-impulsion. Pseudo-densité de probabilité de Wigner [8].

Pour avoir la fonction caractéristique (apparente) du système position-vitesse, il faut former l'opérateur :

$$e^{i(\sum \alpha_k x_k + \sum \beta_k p_k)},$$

c'est-à-dire poser :

$$A = i \sum \alpha_k x_k, \quad B = i \sum \beta_k p_k, \quad p_k = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$BA - AB = -\hbar \sum \alpha_k \beta_k.$$

On a donc :

$$m = -\hbar \sum \alpha_k \beta_k,$$

et :

$$e^{A+B} = e^{i \sum \alpha_k \left(x_k - \frac{h}{2} \beta_k\right)} e^{-h \sum \beta_k \frac{\partial}{\partial x_k}}.$$

La fonction caractéristique cherchée est :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta) &= (e^{A+B} \psi, \psi) = \int \psi^* e^{i \sum \alpha_k \left(x_k - \frac{h}{2} \beta_k\right)} e^{-h \sum \beta_k \frac{\partial}{\partial x_k}} \psi dx \\ &= \int \psi^*(x) e^{i \sum \alpha_k \left(x_k - \frac{h}{2} \beta_k\right)} \psi(x - h\beta) dx. \end{aligned}$$

Le changement de variables $x_k - \frac{h}{2} \beta_k = \xi_k$ lui donne la forme définitive :

$$(50) \quad \varphi(\alpha, \beta) = \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \psi\left(\xi - \frac{h}{2} \beta\right) \psi^*\left(\xi + \frac{h}{2} \beta\right) d\xi.$$

C'est la transformée de Fourier d'une fonction $f(x, u)$ qui joue le rôle d'une densité de probabilité, sauf qu'elle peut, pour certaines fonctions ψ et certaines valeurs des x_k , ne pas être positive. On trouve, après quelques transformations simples, que :

$$(51) \quad f(x, u) = \frac{1}{(h\pi)^n} \int e^{-\frac{2i}{h} \sum u_k \xi_k} \psi(x - \xi) \psi^*(x + \xi) d\xi.$$

37. — Autre démonstration [13].

La démonstration précédente est celle qui vient le plus naturellement à l'esprit. Elle utilise la définition de l'opérateur e^{A+B} , c'est-à-dire celle de la fonction exponentielle, par un développement en série. Dans le cas particulier où :

$$A = i \sum \alpha_k x_k, \quad B = -h \sum \beta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

cette démonstration n'est donc valable que si la fonction ψ est indéfiniment dérivable par rapport aux x_k . Or la forme du *résultat* n'exige évidemment pas que ψ soit dérivable. On peut donc se demander si la dérivabilité est nécessaire (tout au moins la dérivabilité illimitée), ou si ce n'est pas seulement une hypothèse superflue, attachée à un type de démonstration restrictif.

La réponse est donnée par la démonstration suivante, qui résulte de théorèmes généraux de M. E. ARNOUS que nous avons brièvement résumés à la fin du paragraphe 26 :

Si C est un opérateur self adjoint, le symbole :

$$\psi_s(x) = e^{isc} \psi(x),$$

signifie que $\psi_s(x)$ est la solution de l'équation fonctionnelle :

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi_s(x)}{\partial s} = C \psi_s(x),$$

qui se réduit à $\psi_s(x) = \psi(x)$ pour $s = 0$. La fonction caractéristique de la grandeur C s'écrit par suite :

$$(\psi, e^{isc} \psi) = (\psi_0, \psi_s).$$

Appliquons ceci à l'opérateur :

$$C = \sum \alpha_k x_k - \frac{h}{i} \sum \beta_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

La fonction caractéristique que nous cherchons est :

$$\varphi(\alpha, \beta) = (\psi, e^{ic} \psi) = (\psi_0, \psi_1).$$

Or l'équation fonctionnelle que vérifie $\psi_s(x)$ est ici :

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} = \sum \alpha_k x_k \cdot \psi_s - \frac{h}{i} \sum \beta_k \frac{\partial \psi_s}{\partial x_k}.$$

C'est une équation aux dérivées partielles linéaire, facile à intégrer. Il suffit seulement que ψ_s admette des dérivées *premières* continues. (Pour la suite, il faudra même supposer l'existence de dérivées secondes continues, mais pas plus)

Pour intégrer cette équation aux dérivées partielles, il suffit de passer par l'intermédiaire du système différentiel :

$$ds = \frac{dx_k}{h\beta_k} = \frac{d\psi_s}{i\psi_s \sum \alpha_k x_k}.$$

qui admet les intégrales :

$$x_k - h\beta_k s = c_k,$$

$$\psi_s = c e^{is \sum \alpha_k c_k + \frac{ih s^2}{2} \sum \alpha_k \beta_k}$$

c_k, c étant des constantes d'intégration.

On a donc immédiatement :

$$\psi_s(x) = \psi(x - h\beta s) e^{is \sum \alpha_k (x_k - h\beta_k s) + \frac{ih s^2}{2} \sum \alpha_k \beta_k},$$

$\psi_s(x)$ se réduisant bien à $\psi(x)$ pour $s = 0$.

La fonction caractéristique relative à l'opérateur :

$$C = \sum \alpha_k x_k - \frac{h}{i} \sum \beta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

où les variables α_k et β_k sont supposées fixées, est égale au produit scalaire :

$$(\psi_s, \psi).$$

C'est une véritable fonction caractéristique *relativement à la variable s*.

Mais ce que l'on cherche, c'est la fonction caractéristique φ , si elle existe, du système de $2n$ variables aléatoires $X_1, \dots, U_n$. C'est une fonction des α_k, β_k qui est égale à ce qu'on obtient en faisant $s = 1$ dans le produit scalaire ci-dessus.

Pour $s = 1$, on trouve que :

$$e^{ic} \psi = \psi(x - h\beta) e^{i \sum \alpha_k \left(x_k - \frac{h}{2}\right) \beta_k}.$$

On retrouve donc très simplement le résultat obtenu précédemment par des développements en série et des formules de récurrence.

Remarque fondamentale. — La fonction φ est la seule fonction compatible avec tous les principes de la mécanique quantique qui puisse jouer le rôle de fonction caractéristique pour le système de $2n$ variables aléatoires $X_1, \dots, U_n$. Malheureusement, il n'y a aucune raison que soit une véritable fonction caractéristique, c'est-à-dire la transformée de Fourier-Stieltjes d'une fonction de répartition. Si par exemple la « loi de probabilité » dont φ est la fonction caractéristique admet une densité de probabilité, cette densité *peut* ne pas être positive, tout en restant sommable et normée. Nous dirons que c'est une *pseudo-densité de probabilité*, et que φ est une *pseudo-fonction caractéristique*.

En somme, la compatibilité entre le formalisme de la mécanique quantique et le formalisme du calcul des probabilités est rétablie si l'on renonce à la signification physique de certaines probabilités. Les grandeurs que nous appelons pseudo-probabilités nous serviront dans la suite, de la même manière que des probabilités, comme intermédiaire de calcul pour construire des *moyennes*. Ces moyennes auront, ou pourront avoir un sens physique, même si elles ne satisfont pas aux inégalités que l'on rencontre avec des probabilités positives.

L'existence de ces pseudo-probabilités négatives n'est pas une conséquence des relations d'incertitude. C'est, au même titre que les relations d'incertitude, une conséquence de la non-commutabilité de deux opérateurs. Il peut arriver, dans des cas particuliers (oscillateur harmonique) que l'on rencontre pour le système position-impulsion, une pseudo-densité qui soit cependant une vraie densité de probabilité positive, parfaitement compatible avec les relations d'incertitude.

La fonction φ contient les 2^n véritables fonctions caractéristiques que fournissent les principes de la mécanique quantique (§ 34).

38. — Usages de la pseudo-densité de probabilité de Wigner. Nouvelles formules relatives aux valeurs moyennes [12-13-51-52].

Si un opérateur self adjoint C est fonction des opérateurs x_k et p_k , la variable aléatoire associée à C n'est pas fonction des X_k, U_k . Est-il cependant possible de calculer sa valeur moyenne par l'intermédiaire de la pseudo-densité f ?

Nous allons discuter ce problème, dont la solution est initialement due à J. YVON, en ne faisant aucune hypothèse restrictive sur l'opérateur C , qui ne sera pas nécessairement fonction des x_k, p_k (dans la mesure où cela peut arriver) et qui pourra ne pas être self adjoint (il sera souvent utile de le supposer unitaire).

Pour mettre en évidence la symétrie entre la position et l'impulsion, introduisons la transformée de Fourier :

$$\psi_1(x') = \mathfrak{C} \psi = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int e^{\frac{i}{h} \sum x_k x'_k} \psi(x) dx.$$

ψ se déduit de ψ_1 par la formule inverse :

$$\psi(x) = \mathfrak{C}^{-1} \psi_1 = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{h} \sum x_k x'_k} \psi_1(x') dx'.$$

La formule de la valeur moyenne s'écrit :

$$\bar{C} = \int \psi^* C \psi dx = \int \psi^* C \mathfrak{C}^{-1} \psi_1 dx,$$

ou :

$$(52) \quad \bar{C} = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int \psi^*(x) \psi_1(x') C_x e^{-\frac{i}{h} \sum x_k x'_k} dx dx',$$

la notation C_x rappelant que C agit sur les fonctions des x_k , les autres variables jouant le rôle de paramètres.

En particulier, la fonction caractéristique de C a pour expression :

$$(53) \quad \varphi(\alpha) = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int \psi^*(x) \psi_1(x') e^{i\alpha C_x} e^{-\frac{i}{h} \sum x_k x'_k} dx dx'.$$

La fonction :

$$f(\alpha, x, x') = e^{i\alpha C_x} e^{-\frac{i}{h} \sum x_k x'_k},$$

est la solution de l'équation fonctionnelle :

$$\frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = C_x f,$$

qui se réduit à $e^{-\frac{i}{h} \sum x_k x'_k}$ lorsque $\alpha = 0$. Il est intéressant de remarquer que cette exponentielle *ne dépend pas de l'état* ψ . Dans la formule (53), il y a séparation entre l'influence de l'état et celle de l'opérateur. Mais les conditions initiales font intervenir encore une fonction des x_k, x'_k .

On peut, à certains points de vue, améliorer la formule (53). Posons :

$$g(\alpha, x, x') = e^{\frac{i}{h} \sum x_k x'_k} e^{i\alpha C_x} e^{-\frac{i}{h} \sum x_k x'_k}.$$

La fonction g est la solution de l'équation fonctionnelle :

$$\frac{1}{i} \frac{\partial g}{\partial \alpha} = e^{\frac{i}{h} \sum x_k x'_k} C_x g e^{-\frac{i}{h} \sum x_k x'_k},$$

qui se réduit à la valeur *constante* 1 pour $\alpha = 0$. Et alors :

$$(54) \quad \varphi(\alpha) = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int \psi^\star(x) \psi_1(x') e^{-\frac{i}{h} \sum x_k x'_k} g(\alpha, x, x') dx dx'.$$

Ceci posé, remarquons que la formule (51) nous fournit, par inversion de Fourier, le produit $\psi(x - \xi) \psi^\star(x + \xi)$ à l'aide de la pseudo-densité f :

$$\psi(x - \xi) \psi^\star(x + \xi) = \int f e^{\frac{2i}{h} \sum \xi_k u_k} du.$$

Par suite, si l'on pose :

$$x_k - \xi_k = \lambda_k, \quad x_k + \xi_k = \mu_k, \\ \psi(\lambda) \psi^\star(\mu) = \int f\left(\frac{\lambda + \mu}{2}, u\right) e^{\frac{i}{h} \sum (\mu_k - \lambda_k) u_k} du.$$

Prenons la transformée de Fourier des deux membres par rapport à λ :

$$\psi_1(\lambda') \psi^\star(\mu) = \int f\left(\frac{\lambda + \mu}{2}, u\right) e^{\frac{i}{h} \sum (\mu_k - \lambda_k) u_k} e^{\frac{i}{h} \sum \lambda_k x'_k} du d\lambda,$$

ou, en revenant aux notations initiales,

$$\psi_1(x') \psi^\star(x) = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int f\left(\frac{\lambda + x}{2}, u\right) e^{\frac{i}{h} \sum [(x_k - \lambda_k) u_k + \lambda_k x'_k]} du d\lambda.$$

Portons ceci dans la formule (52) :

$$\bar{C} = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int f\left(\frac{\lambda + x}{2}, u\right) e^{\frac{i}{h} \sum [(x_k - \lambda_k) u_k + \lambda_k x'_k]} C_x e^{-\frac{i}{h} \sum x_k x'_k} du d\lambda dx dx'.$$

Pour interpréter cette formule, faisons apparaître artificiellement un facteur $e^{\frac{i}{h} \sum x_k x'_k}$ et remplaçons les variables λ_k par les nouvelles variables :

$$\xi_k = \frac{\lambda_k + x_k}{2}.$$

Il vient :

$$\bar{C} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int f(\xi, u) d\xi du \int e^{-\frac{2i}{\hbar} \sum (x_k - \xi_k)(x'_k - u_k)} e^{\frac{i}{\hbar} \sum x_k x'_k} C_x e^{-\frac{i}{\hbar} \sum x_k x'_k} dx dx'.$$

En changeant un peu les notations, nous pouvons poser :

$$(55) \quad \bar{C} = \int f(x, u) c(x, u) dx du,$$

avec :

$$(56) \quad c(x, u) = \frac{1}{(\pi\hbar)^n} \int e^{-\frac{2i}{\hbar} \sum (\lambda_k - x_k)(\mu_k - u_k)} e^{\frac{i}{\hbar} \sum \lambda_k \mu_k} C_\lambda e^{-\frac{i}{\hbar} \sum \lambda_k \mu_k} d\lambda d\mu.$$

D'où le résultat de J. YVON [52] :

La pseudo-densité de probabilité de Wigner permet de calculer la moyenne de la variable aléatoire associée à l'opérateur C dans l'état ψ , conformément au formalisme classique du calcul des probabilités.

Si C est une fonction des opérateurs x_k, p_k , la variable aléatoire associée à C est la fonction $c(x, u)$ des variables aléatoires X_k, U_k . Bien entendu, il n'y a pas là contradiction avec les résultats précédents, parce qu'on prend la moyenne de cette fonction relativement à la pseudo-densité f , qui n'est pas l'équivalent d'une vraie densité de probabilité. En outre, la fonction $c(x, u)$ ne s'obtient pas, sauf dans des cas particuliers, en remplaçant p par u dans la fonction $C(x, p)$.

L'expression de la fonction caractéristique de C est donnée par la formule (56), avec :

$$(57) \quad c(x, u) = \frac{1}{(\pi\hbar)^n} \int e^{-\frac{2i}{\hbar} \sum (\lambda_k - x_k)(\mu_k - u_k)} e^{\frac{i}{\hbar} \sum \lambda_k \mu_k} e^{i \sum C_\lambda} e^{-\frac{i}{\hbar} \sum \lambda_k \mu_k} d\lambda d\mu.$$

On voit apparaître la fonction g de la formule (54).

Si l'on prend, par exemple, $C_x = x_j$, on a :

$$c(x, u) = \frac{1}{(\pi\hbar)^n} \int e^{-\frac{2i}{\hbar} \sum (\lambda_k - x_k)(\mu_k - u_k)} \lambda_j d\lambda d\mu.$$

Les propriétés de l'intégrale de Dirichlet montrent immédiatement que $C(x, u) = x_j$.

Si l'on prend :

$$C_x = p_j = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

on a de même :

$$c(x, u) = \frac{1}{(\pi\hbar)^n} \int e^{-\frac{2i}{\hbar} \sum (\lambda_k - x_k)(\mu_k - u_k)} \mu_j d\lambda d\mu,$$

d'où :

$$c(x, u) = u_j.$$

Plus généralement, si l'on prend :

$$C_x = e^{i \sum (\alpha_k x_k + \beta_k p_k)},$$

on doit vérifier que l'on retrouve exactement :

$$c(x, u) = e^{i \sum (\alpha_k x_k + \beta_k u_k)}.$$

Le calcul est facile à faire, car on sait déjà l'effet de cet opérateur sur une fonction des x_k . Il est inutile de le détailler.

39. — Étude du système position-impulsion-énergie.

Étudions maintenant les lois de probabilité où figure l'opérateur hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2} \sum p_k^2 + V(x, t).$$

On sait que le spectre de H n'est pas en général complètement continu. Les problèmes de moyennes où H intervient ne sont donc pas, en principe, justiciables d'une densité de probabilité. On doit par suite s'attendre à ce que les formules (55) et (57) conduisent dans ce cas à des difficultés. D'autre part, ces formules ne sont utilisables que dans la mesure où l'effet de l'opérateur $e^{i\alpha C_k}$ est connu. C'est ce qui se passait pour le système position-impulsion. Mais lorsque l'énergie intervient, il ne semble pas possible d'explicitier le mode d'action de cet opérateur. Remarquons enfin que, si C est une fonction de x_k , p_k et H , il intervient trois groupes de variables aléatoires stochastiquement distinctes, la position, l'impulsion et l'énergie, qu'il importe de discerner. Or la formule (57) ramène tout à des combinaisons algébriques des variables aléatoires position et impulsion. Elle dissimule donc une partie du caractère des grandeurs aléatoires qu'on a introduites. Pour ces diverses raisons, dans les problèmes où intervient H , nous ne nous servirons pas de la pseudo-densité de probabilité de Wigner, mais nous ferons appel directement à la formule (52).

Le problème que nous nous proposons est d'exprimer, autant que faire se peut, la pseudo-fonction caractéristique du système position-impulsion-hamiltonien, l'hamiltonien représentant l'énergie du corpuscule dans le cas où le potentiel V ne dépend pas du temps.

Puisque l'hamiltonien intervient, nous devons rappeler dès maintenant que la fonction d'onde ψ dépend du temps, et que son évolution est régie par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{h}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi,$$

appelée *équation de Schrödinger*. Grâce à cette équation, la fonction $\psi(x, t)$ est déterminée par sa forme initiale $\psi(x, 0)$. Si en particulier, H ne dépend pas du temps, on

peut écrire formellement :

$$\psi(x, t) = e^{i h t H} \psi(x, 0).$$

Nous nous proposons donc d'étudier l'opérateur :

$$(58) \quad C = e^{i(\sum \alpha_k x_k + \sum \beta_k p_k + \gamma H)}.$$

Introduisons une variable nouvelle s et considérons la fonction :

$$\psi(s) = e^{i s (\sum \alpha_k x_k + \sum \beta_k p_k + \gamma H)}.$$

C'est la solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi(s)}{\partial s} = \left(\sum \alpha_k x_k + \sum \beta_k p_k + \gamma H \right) \psi(s),$$

qui se réduit à ψ pour $s = 0$. Et la pseudo-fonction caractéristique cherchée est égale à :

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \int \psi^*(0) \psi(1) dx.$$

L'équation aux dérivées partielles ci-dessus s'écrit explicitement :

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi(s)}{\partial s} = \left(\sum \alpha_k x_k + \gamma V \right) \psi(s) - \frac{\hbar}{i} \sum \beta_k \frac{\partial \psi(s)}{\partial x_k} - \gamma \frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi(s).$$

Faisons les transformations :

$$\psi(s) = e^{i \gamma \left(x - \frac{\hbar}{2} s' \right)} g(s'), \quad s = \frac{s'}{\gamma \hbar}.$$

La fonction $g(s')$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$(59) \quad \frac{\hbar}{i} \frac{\partial g}{\partial s'} = \left(\sum \frac{\alpha_k}{\gamma} x_k + V \right) g - \frac{\hbar^2}{2} \Delta g,$$

et elle se réduit, pour $s' = 0$, à :

$$\psi e^{-i \sum \beta_k x_k},$$

ce qui la détermine. On a alors, en faisant $s = 1$, c'est-à-dire $s' = \gamma \hbar$,

$$(60) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \int \psi^* e^{i \sum \beta_k \left(x_k - \frac{\hbar}{2} s' \right)} g dx,$$

où g désigne $g(\gamma \hbar)$.

La recherche de la pseudo-fonction caractéristique φ revient à la connaissance de la fonction g , c'est-à-dire à la résolution d'une équation de Schrödinger. Posons en effet :

$$H_{\mu} = \sum \mu_k x_k + H.$$

g est solution de l'équation du type de Schrödinger :

$$\frac{h}{i} \frac{\partial g}{\partial s'} = H_{\mu} g.$$

Dans cette équation, le temps t joue le rôle d'un paramètre fixé. Si le potentiel dépend du temps, elle ne se réduit pas pour $\mu_k = 0$ à l'équation de Schrödinger proprement dite :

$$\frac{h}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi,$$

qui régit l'évolution de la fonction d'onde ψ . Ces équations correspondent à deux problèmes de Schrödinger différents. Il n'en résulte pas moins que la recherche de la pseudo-fonction caractéristique du système position-impulsion-hamiltonien se ramène à un problème de Schrödinger, pour un hamiltonien H_{μ} voisin de H (ce qui n'implique pas de grandes simplifications).

Si le potentiel ne dépend pas du temps, l'équation $\frac{h}{i} \frac{\partial g}{\partial s'} = H_{\mu} g$ se réduit à l'équation de Schrödinger elle-même (en y remplaçant s' par t) lorsque $\mu_k = 0$.

Que le potentiel dépende ou non du temps, la solution formelle de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{h}{i} \frac{\partial g}{\partial s'} = H_{\mu} g,$$

s'écrit :

$$g(s') = e^{\frac{i}{h} s' H_{\mu}} g(0),$$

c'est-à-dire :

$$g(s') = e^{\frac{i}{h} s' [\sum \mu_k x_k + H]} g(0).$$

On voit, en somme, que le problème de la pseudo-fonction caractéristique de la position, de l'impulsion et de l'hamiltonien se ramène à la recherche de cette même fonction pour la position et l'hamiltonien seulement.

Ces formules contiennent la fonction caractéristique exacte de l'hamiltonien. Il suffit d'y faire $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 0$. Supposons en particulier que le potentiel ne dépende pas du temps. H est alors l'énergie. La fonction $g(s')$ est la solution de l'équation de Schrödinger proprement dite qui, pour $s' = 0$, se réduit à $\psi(x, t)$. Il est clair que la fonction :

$$g(s') = \psi(x, t + s'),$$

satisfait à toutes les conditions imposées, et que, par suite, pour $s' = h\gamma$:

$$g(s') = g(h\gamma) = \psi(x, t + h\gamma).$$

On a donc :

$$\varphi(\gamma) = \int \psi^\star(x, t) \psi(x, t + h\gamma) dx.$$

On sait d'autre part que, si H ne dépend pas du temps, l'énergie est une constante du mouvement et sa fonction caractéristique ne dépend pas du temps.

Cela permet d'écrire en particulier :

$$(61) \quad \varphi(\gamma) = \int \psi^\star\left(x, t - \frac{h\gamma}{2}\right) \psi\left(x, t + \frac{h\gamma}{2}\right) dx.$$

Cas particulier. — Supposons pour fixer les idées que l'hamiltonien H ne dépende pas du temps, et faisons l'hypothèse que le spectre de l'opérateur H est discret. Soient $E_m(\mu)$ ses valeurs propres, $g_m(x, \mu)$ ses fonctions propres normées. On peut écrire la fonction g sous forme d'un développement en série :

$$g = \sum_m c_m g_m(x, \mu) e^{\frac{i}{h} E_m s'}.$$

les coefficients c_m étant donnés par les formules :

$$c_m = \int \psi(\xi) e^{-\frac{i}{h\gamma} \sum_{l=1}^n \alpha_l \xi_l} g_m^\star(\xi, \mu) d\xi,$$

qui tiennent compte de l'expression de g pour $s' = 0$,

On a donc, pour $s = 1$, ou $s' = h\lambda$,

$$g = \sum_m e^{i\gamma E_m(\mu)} g_m(x, \mu) \int \psi(\xi) e^{-\frac{i}{h\gamma} \sum_{l=1}^n \beta_l \xi_l} g_m^\star(\xi, \mu) d\xi.$$

Par suite, la pseudo-fonction caractéristique du système X, U, H s'écrit :

$$(62) \quad \varphi = e^{-\frac{i}{2\gamma} \sum_{k=1}^n \beta_k^2} \sum_m e^{i\gamma E_m\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)} \left| \int \psi(x) g_m^\star\left(x, \frac{\alpha}{\gamma}\right) e^{-\frac{i}{h\gamma} \sum_{k=1}^n \beta_k x_k} dx \right|^2.$$

Si l'on fait $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 0$, E_m devient valeur propre de l'énergie et $g\left(x, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$ devient fonction propre de l'énergie. L'intégrale du second membre de (62) se réduit à :

$$\int \psi g_m^\star dx = (\psi, g_m),$$

et :

$$\varphi = \sum_m e^{i\gamma E_m} \left| \int \psi g_m^\star dx \right|^2.$$

C'est bien l'expression correcte de la fonction caractéristique de l'énergie. Mais, si $\beta \neq 0$, la formule (62) ne fournit pas nécessairement une vraie fonction caractéristique, comme le laisse prévoir la présence du facteur $e^{-\frac{i}{2\gamma} \sum \beta_k^2}$ devant le second membre. Ce n'est qu'une pseudo-fonction caractéristique.

40. — Remarque.

Les expressions (60) ou (62) représentent la pseudo-fonction caractéristique du système position-impulsion-énergie telle qu'elle résulte des principes de la mécanique quantique. L'application des formules de Wigner-Yvon conduirait à un résultat équivalent.

Comparons maintenant les fonctions caractéristiques de systèmes (X_k, U_k) d'une part, H d'autre part.

(X_k, U_k) a pour pseudo-fonction caractéristique :

$$\overline{e^{i\sum(\alpha_k X_k + \beta_k U_k)}} = \int e^{i\sum \alpha_k X_k} \psi\left(x - \frac{h}{2}\beta, t\right) \psi^*\left(x + \frac{h}{2}\beta, t\right) dx.$$

H a pour fonction caractéristique :

$$\overline{e^{i\gamma H}} = \int \psi\left(x, t + \frac{h}{2}\gamma\right) \psi^*\left(x, t - \frac{h}{2}\gamma\right) dx.$$

Or considérons la fonction :

$$(63) \quad \Phi(\alpha, \beta, \gamma, t) = \int e^{i\sum \alpha_k X_k} \psi\left(x - \frac{h}{2}\beta, t + \frac{h}{2}\gamma\right) \psi^*\left(x + \frac{h}{2}\beta, t - \frac{h}{2}\gamma\right) dx.$$

Cette fonction contient, pour $\gamma = 0$, la pseudo-fonction caractéristique de Wigner, et pour $\alpha_k = 0, \beta_k = 0$, la fonction caractéristique de H. Elle présente, d'autre part, un caractère de symétrie remarquable entre l'espace et le temps. On peut se demander si elle ne constitue pas la pseudo-fonction caractéristique du système position-impulsion-énergie, telle qu'elle résulte des principes de la mécanique quantique. Il faut donc la comparer à la fonction φ donnée par la formule (60) et obtenue par un raisonnement purement déductif. Nous allons voir que les fonctions φ et Φ sont différentes, d'où il résultera que seule la fonction φ est correcte. Il suffit de le vérifier sur un exemple. Nous allons étudier l'oscillateur harmonique à une dimension, et nous désignerons, moyennant un choix convenable des unités, par $\frac{x^2}{2}$ le potentiel de la force à laquelle il est soumis. Nous choisirons, d'autre part, pour fonction d'onde ψ la fonction la plus simple possible.

Supposons que ce corpuscule soit dans l'état de base $\psi = (h\pi)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{2}t} e^{-\frac{x^2}{2h}}$ et formons d'abord la fonction caractéristique ϕ . Il faut calculer les fonctions propres g_m de l'équation de Schrödinger :

$$\frac{h}{i} \frac{\partial g}{\partial s'} = \left(\frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{x^2}{2} \right) g - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}.$$

Faisons le changement de variable $x + \frac{\alpha}{\gamma} = z\sqrt{h}$. L'équation ci-dessus devient :

$$\frac{h}{i} \frac{\partial g}{\partial s'} = \frac{1}{2} \left(h z^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \right) g - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

Elle a des solutions particulières de la forme :

$$g = e^{\frac{i}{h} E_m s'} g_m(z),$$

avec :

$$\frac{\partial^2 g_m}{\partial s^2} + \left(\frac{2}{h} E_m + \frac{\alpha^2}{h \gamma^2} - z^2 \right) g_m = 0.$$

On sait qu'il faut prendre, m étant un entier non négatif,

$$\frac{2}{h} E_m + \frac{\alpha^2}{h \gamma^2} = 2m + 1, \quad E_m = mh + \frac{1}{2} \left(h - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \right),$$

et que les fonctions propres g_m sont liées aux fonctions d'Hermite $\theta_m(z)$ par la relation :

$$g_m(z) = h^{-\frac{1}{4}} \theta_m(z), \quad \text{ou :} \quad g_m(x) = h^{-\frac{1}{4}} \theta_m \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left(x + \frac{\alpha}{\gamma} \right) \right],$$

le facteur $h^{-\frac{1}{4}}$ réalisant la normalisation des g_m par rapport à la variable x .

Il faut maintenant calculer les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) g_m^*(x) e^{-\frac{i}{h\gamma} x} dx = h^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{2}t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2h} - \frac{i}{h\gamma} x} \theta_m \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left(x + \frac{\alpha}{\gamma} \right) \right] dx.$$

Posons à nouveau $x + \frac{\alpha}{\gamma} = z\sqrt{h}$. Ces intégrales s'écrivent :

$$\pi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{2}t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2h} \left(z\sqrt{h} - \frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 - \frac{i}{h\gamma} \left(z\sqrt{h} - \frac{\alpha}{\gamma} \right)} \theta_m(z) dz.$$

Pour les calculer, nous définissons les fonctions d'Hermite $\theta_m(z)$ par le développement en série :

$$e^{-\frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda z - \frac{z^2}{2}} = \pi^{\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\sqrt{2})^m}{m!} \theta_m(z),$$

nous multiplions les deux membres par $e^{-\frac{1}{2h}\left(z\sqrt{h}-\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2-\frac{i\beta}{h\gamma}\left(z\sqrt{h}-\frac{\alpha}{\gamma}\right)}$, et nous intégrons de $-\infty$ à $+\infty$. Un calcul élémentaire montre que :

$$\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2-2i\alpha\beta}{4h\gamma^2}} e^{-\frac{\lambda(\alpha-i\beta)}{\gamma\sqrt{h}}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\sqrt{2})^m}{m!} \theta_m(z).$$

Par suite :

$$\pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2h}\left(z\sqrt{h}-\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2-\frac{i\beta}{h\gamma}\left(z\sqrt{h}-\frac{\alpha}{\gamma}\right)} \theta_m(z) dz = \frac{1}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2-2i\alpha\beta}{4h\gamma^2}} \left(\frac{\alpha-i\beta}{\gamma\sqrt{2h}}\right)^m.$$

Le carré du module de cette intégrale est égal à :

$$\frac{1}{m!} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2h\gamma^2}} \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2h\gamma^2}\right)^m.$$

Par suite :

$$\varphi = e^{-\frac{i\beta^2}{2\gamma}} e^{\frac{i\gamma}{2}\left(h-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{i\gamma hm}}{m!} \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2h\gamma^2}\right)^m e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2h\gamma^2}}.$$

Finalement :

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = e^{\frac{i\gamma}{2}} e^{-(\alpha^2+\beta^2)\frac{1+i\gamma}{2h\gamma^2}}.$$

Lorsque α et β tendent vers 0, on vérifie que φ tend vers $e^{\frac{i\gamma}{2}}$, fonction caractéristique de l'énergie dans l'état ψ choisi. Pour trouver la limite de φ lorsque $\gamma \rightarrow 0$, il faut développer $\log \varphi$ suivant les puissances de γ :

$$\log \varphi = -\frac{h}{4}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{i\gamma}{2} \left[1 - \frac{h}{6}(\alpha^2 + \beta^2) \right] + \dots$$

On voit que :

$$\lim_{\gamma=0} \varphi = e^{-\frac{h}{4}(\alpha^2+\beta^2)};$$

on vérifie facilement que c'est bien la densité de probabilité de Wigner dans l'état ψ .

Calculons de même la fonction Φ , ce qui est beaucoup plus rapide :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} e^{-\frac{1}{2h}\left(x-\frac{h}{2}\beta\right)^2-\frac{1}{2h}\left(x+\frac{h}{2}\beta\right)^2} e^{\frac{i}{2}\left(t+\frac{h}{2}\gamma\right)-\frac{i}{2}\left(t-\frac{h}{2}\gamma\right)} \frac{dx}{\sqrt{h\pi}},$$

ou :

$$\Phi = e^{\frac{i}{2}\gamma} e^{-\frac{h}{4}(\alpha^2+\beta^2)}.$$

On vérifie immédiatement que la fonction Φ a même limite que la fonction φ lorsque $\gamma \rightarrow 0$, ou lorsque α et β tendent vers 0. Mais Φ n'est pas identique à φ . C'est la fonction φ , et non la fonction Φ , qui généralise la densité de Wigner au système position-impulsion-énergie.

Remarquons que la pseudo-densité de Wigner est ici une véritable densité de probabilité.

LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION ET LA THÉORIE DU TRANSFERT EN MÉCANIQUE QUANTIQUE

41. — Variation de φ et de f en fonction du temps. Équation de structure et équation de Schrödinger [8].

Maintenant seulement, nous allons nous occuper de la variation des éléments statistiques du corpuscule quantique en fonction du temps. Nous traiterons dans la suite $f(x, u)$ comme une densité de probabilité et $\varphi(\alpha, \beta)$ comme une fonction caractéristique, et nous ferons apparaître le temps en écrivant $f(x, u, t)$ et $\varphi(\alpha, \beta, t)$.

On sait que la variation de ψ en fonction du temps est donnée par une équation aux dérivées partielles, l'*équation de Schrödinger*, que l'on obtient d'habitude par le raisonnement suivant (qui n'est pas une démonstration mathématique) :

A l'énergie du corpuscule, on fait correspondre l'opérateur $E = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t}$, qui provient de la transformation infinitésimale du groupe des déplacements dans le temps. On écrit ensuite le principe de la conservation de l'énergie, en le transcrivant aux opérateurs :

$$E = \frac{1}{2} \sum p_k^2 + V,$$

$V(x, t)$ étant le potentiel des forces extérieures (rappelons que la masse du corpuscule a été prise comme unité). L'équation de Schrödinger est l'équation :

$$E \psi = \left(\frac{1}{2} \sum p_k^2 + V \right) \psi,$$

soit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{h}{2i} \Delta \psi - \frac{1}{ih} V \psi.$$

Si l'on désigne par H l'opérateur hamiltonien $\frac{1}{2} \sum p_k^2 + V$, elle s'écrit :

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi.$$

Elle exprime que, si l'on se donne $\psi(x, 0)$, on en déduit $\psi(x, t)$. Si le potentiel V ne dépend pas du temps, l'expression de $\psi(x, t)$ est même formellement très simple :

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar} t H} \psi(x, 0).$$

Il en résulte que $f(x, u, t)$ et $\varphi(\alpha, \beta, t)$, qui s'expriment à l'aide de $\psi(x, t)$, s'expriment à l'aide de t et de $\psi(x, 0)$. Mais il n'est pas évident à l'avance que $\varphi(\alpha, \beta, t)$ soit connu complètement à partir de $\varphi(\alpha, \beta, 0)$. Nous allons démontrer que cela résulte de la forme de l'équation de Schrödinger.

Nous allons d'ailleurs raisonner à l'envers. Nous faisons l'hypothèse que $\varphi(\alpha, \beta, t)$ vérifie une équation du type (3) du paragraphe 5, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} = B \varphi,$$

et que la variation de ψ est, elle aussi, déterministe, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur H tel que :

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi.$$

Nous allons en déduire que, si H est un opérateur différentiel, c'est nécessairement l'hamiltonien. Ce sera une démonstration de l'équation de Schrödinger, moyennant certaines hypothèses statistiques.

Comme :

$$\varphi(\alpha, \beta, t) = \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \psi\left(\xi - \frac{\hbar}{2} \beta, t\right) \psi^*\left(\xi + \frac{\hbar}{2} \beta, t\right) d\xi,$$

on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) d\xi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} = \frac{\hbar}{2} \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \xi_k} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \right) d\xi.$$

Il est entendu que les notations ψ, ψ^* désignent dans tout ce calcul $\psi\left(\xi - \frac{\hbar}{2} \beta, t\right)$ et $\psi^*\left(\xi + \frac{\hbar}{2} \beta, t\right)$.

Dans $\alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k}$ figure la quantité :

$$\alpha_k e^{i \sum \alpha_k \xi_k} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_k} e^{i \sum \alpha_k \xi_k}.$$

On remarque que :

$$\left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \xi_k} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_k} e^{i \sum \alpha_k \xi_k} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \xi_k} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \right) \right] + e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \xi_k^2} \right).$$

Si l'on intègre et qu'on applique la formule d'Ostrogradsky au premier terme, on voit qu'il s'annule, parce que $|\psi|$ s'annule à l'infini. Il reste :

$$\sum \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} = \frac{h}{2i} \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*) d\xi.$$

Par suite :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} = \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \left[\psi^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{h}{2i} \Delta \psi \right) + \psi \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{h}{2i} \Delta \psi^* \right) \right] d\xi.$$

Nous voulons que le second membre soit de la forme $B \varphi$.

Nous supposons que $\psi(x, t)$ vérifie une équation fonctionnelle de la forme $\frac{h}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$. Nous l'écrivons (1) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{h}{2i} \Delta \psi = \sum a_{mnp\dots}(x, t) \frac{\partial^{m+n+p+\dots}}{\partial x_1^m \partial x_2^n \partial x_3^p \dots} \psi.$$

Remplaçons x_k par $\xi_k - \frac{h}{2} \beta_k$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{h}{2i} \Delta \psi = \sum a_{mnp\dots} \left(\xi - \frac{h}{2} \beta, t \right) \frac{\partial^{m+n+p+\dots}}{\partial \xi_1^m \partial \xi_2^n \partial \xi_3^p \dots} \psi.$$

Un calcul en tous points analogue à celui du paragraphe 5 montre que :

$$\begin{aligned} & \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \psi^* \left(\xi + \frac{h}{2} \beta, t \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{h}{2i} \Delta \psi \right) d\xi \\ &= \sum \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \psi^* \left(\xi + \frac{h}{2} \beta, t \right) a_{mnp\dots} \left(\xi - \frac{h}{2} \beta, t \right) \frac{\partial^{m+n+\dots} \psi}{\partial \xi_1^m \partial \xi_2^n \dots} d\xi \\ &= \sum a_{mnp\dots} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{h}{2} \beta, t \right) \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \psi^* \left(\xi + \frac{h}{2} \beta, t \right) \frac{\partial^{m+n+\dots}}{\partial \xi_1^m \partial \xi_2^n \dots} \psi \left(\xi - \frac{h}{2} \beta, t \right) d\xi, \end{aligned}$$

(1) Dans tous ces calculs, on peut, à la place des développements en série formels, utiliser une définition générale et beaucoup moins restrictive des opérateurs tels que $H \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$, $B \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta} \right)$, qui ne fait pas intervenir les dérivées successives de ψ ou de $\bar{\psi}$.

et que :

$$\int e^{i \sum \alpha_k \tilde{z}_k} \psi \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{h}{2i} \Delta \psi^* \right) d\xi$$

$$= \sum a^*_{mn...} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{h}{2} \beta, t \right) \int e^{i \sum \alpha_k \tilde{z}_k} \psi \left(\xi - \frac{h}{2} \beta, t \right) \frac{\partial^{m+n+...}}{\partial \xi_1^m \partial \xi_2^n \dots} \psi^* \left(\xi + \frac{h}{2} \beta, t \right) d\xi.$$

L'expression $\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k}$ est ainsi une transformée de la fonction d'onde ψ .

Pour que ce soit une transformée de la fonction φ elle-même, il faut manifestement que toutes les fonctions $\alpha_{mn...}$ soient nulles, sauf $a_{00...} = a$. On a alors :

$$\int e^{i \sum \alpha_k \tilde{z}_k} \psi^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{h}{2i} \Delta \psi \right) d\xi$$

$$= a \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{h}{2} \beta, t \right) \int e^{i \sum \alpha_k \tilde{z}_k} \psi \left(\xi - \frac{h}{2} \beta, t \right) \psi^* \left(\xi + \frac{h}{2} \beta, t \right) d\xi,$$

$$\int e^{i \sum \alpha_k \tilde{z}_k} \psi \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{h}{2i} \Delta \psi^* \right) d\xi$$

$$= a^* \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{h}{2} \beta, t \right) \int e^{i \sum \alpha_k \tilde{z}_k} \psi \left(\xi - \frac{h}{2} \beta, t \right) \psi^* \left(\xi + \frac{h}{2} \beta, t \right) d\xi.$$

Les intégrales des seconds membres sont égales à φ , de sorte que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} = \left[a \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{h}{2} \beta, t \right) + a^* \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{h}{2} \beta, t \right) \right] \varphi.$$

C'est l'équation cherchée. Elle exige que $\psi(x, t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{h}{2i} \Delta \psi = a(x, t) \psi,$$

qui n'est autre que l'équation de Schrödinger, si l'on pose $a(x, t) = \frac{i}{h} V(x, t)$. La théorie du transfert nous montrera bientôt que la quantité V ainsi définie s'identifie avec un potentiel. Nous remplacerons donc tout de suite a par la grandeur purement imaginaire $\frac{i}{h} V$. Nous voyons que :

$$(64) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} = \frac{i}{h} \left[V \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{h}{2} \beta, t \right) - V \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{h}{2} \beta, t \right) \right] \varphi.$$

42. — Conséquences.

L'opérateur :

$$B = \frac{i}{h} \left[V \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{h}{2} \beta, t \right) - V \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{h}{2} \beta, t \right) \right],$$

est bien du type étudié au chapitre premier. Formellement, c'est un opérateur différentiel, de la forme imposée au paragraphe 7.

On en déduit que la pseudo-densité de probabilité $f(x, u, t)$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$(65) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \sum u_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{ih} \left[V \left(x - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right) - V \left(x + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right) \right] f,$$

ou encore :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial u_k} + \dots$$

Si G est une fonction bornée des x_k, u_k , on a de même :

$$(66) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{G} &= \sum u_k \overline{\frac{\partial G}{\partial x_k}} + \frac{1}{ih} \left[\overline{V \left(x + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right)} - \overline{V \left(x - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right)} \right] G, \\ &= \sum u_k \overline{\frac{\partial G}{\partial x_k}} + \sum \overline{\frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial G}{\partial u_k}} + \dots \end{aligned}$$

Enfin, l'équation générale de transfert d'une grandeur $G(x, u, t)$ s'écrit :

$$(67) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \overline{G} + \sum \frac{\partial}{\partial x_k} \rho \overline{Gu_k} \\ = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum u_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{ih} \left[V \left(x + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right) - V \left(x - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right) \right] \right] G, \end{aligned}$$

avec $\rho = |\psi|^2$.

43. — Équations hydrodynamiques associées au corpuscule quantique (Fluide de probabilité) [8-19-22-46].

Puisqu'on peut attacher au corpuscule quantique une équation de transfert, on peut lui associer des équations hydrodynamiques, même si la fonction f n'est pas une vraie densité de probabilité. Il suffit que f soit absolument sommable et normée (et éventuellement pourvue de moments d'ordre convenable).

On vérifie d'abord que la densité de probabilité $\rho = |\psi|^2$, qui est une vraie densité de probabilité, satisfait à l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{u_k}) = 0.$$

Ce résultat est classique.

On peut ensuite écrire les équations hydrodynamiques :

$$\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial t} + \sum_l \overline{u_l} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_l} = \overline{A u_k} - \frac{1}{\rho} \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \rho \overline{u'_k u'_l},$$

avec :

$$A = \frac{1}{i\hbar} \left[V \left(x + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right) - V \left(x - \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right) \right] = - \sum \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial u_k} + \dots$$

On voit que le fluide attaché au corpuscule quantique est soumis, comme il se doit, aux forces dérivant du potentiel V .

Pour connaître la structure de ce fluide, il reste à calculer sa *vitesse* et ses *tensions* en fonction de ψ . Il suffit de former la fonction caractéristique de la pseudo-loi de probabilité liée de l'impulsion en un point, et d'en faire un développement limité. La densité de cette loi de probabilité est $\frac{1}{\psi \psi^*} f$. La pseudo-fonction caractéristique cherchée a pour expression :

$$\varphi_1(\alpha, t) = \frac{1}{\psi \psi^*} \int e^{i \sum \alpha_k u_k} f du,$$

c'est-à-dire :

$$(68) \quad \varphi_1(\alpha, t) = \frac{\psi \left(x - \frac{\hbar}{2} \alpha, t \right) \psi^* \left(x + \frac{\hbar}{2} \alpha, t \right)}{\psi(x, t) \psi^*(x, t)}.$$

Bien entendu, ce n'est pas forcément une vraie fonction caractéristique, car la pseudo-densité de probabilité correspondante n'est pas nécessairement positive.

On a :

$$\begin{aligned} \psi \left(x - \frac{\hbar}{2} \alpha, t \right) &= \psi - \frac{\hbar}{2} \sum \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \frac{\hbar^2}{8} \sum \alpha_k \alpha_l \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_l} + \dots, \\ \psi^* \left(x + \frac{\hbar}{2} \alpha, t \right) &= \psi^* + \frac{\hbar}{2} \sum \alpha_k \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} + \frac{\hbar^2}{8} \sum \alpha_k \alpha_l \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x_k \partial x_l} + \dots \end{aligned}$$

Il faut multiplier ces deux développements et diviser par $\psi \psi^*$, puis identifier avec :

$$\varphi_1(\alpha, t) = 1 + i \sum \alpha_k \overline{u_k} - \frac{1}{2} \sum \alpha_k \alpha_l \overline{u_k u_l} + \dots$$

On trouve ainsi :

$$\overline{u_k} = \frac{1}{2i\psi\psi^*} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) = \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial x_k} \log \frac{\psi^*}{\psi},$$

$$\overline{u_k u_l} = -\frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\psi\psi^*} \left[\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x_k \partial x_l} + \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_l} - \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} \right].$$

Ces résultats sont plus expressifs si l'on sépare le module et l'argument (ou phase) de la fonction ψ , en posant :

$$(69) \quad \psi = ae^{-\frac{i}{\hbar}b}.$$

On trouve alors :

$$(70) \quad \overline{u_k} = \frac{\partial b}{\partial x_k},$$

$$\overline{u_k u_l} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 \log a}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial b}{\partial x_k} \frac{\partial b}{\partial x_l}.$$

Si l'on passe aux moments réduits $\overline{u'_k u'_l} = \overline{u_k u_l} - \overline{u_k} \overline{u_l}$, on a donc la formule très simple :

$$(71) \quad \overline{u'_k u'_l} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 \log a}{\partial x_k \partial x_l}.$$

44. — Propriétés du fluide de probabilité. Fluides irrotationnels et équation de Jacobi [8-22].

Ce fluide a pour densité la quantité positive $\rho = \psi\psi^*$. Il est soumis au champ de potentiel V . Sa vitesse dérive du potentiel b , phase de la fonction d'onde ψ . Ses tensions ont pour expression :

$$T_{kl} = -\rho \overline{u'_k u'_l} = \frac{\hbar^2}{2} a^2 \frac{\partial^2 \log a}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Comme ce fluide provient de pseudo-lois de probabilité, qui ne sont pas nécessairement positives, il n'a pas nécessairement toutes les propriétés d'un gaz réel. Les tensions, en particulier, ne satisfont pas aux inégalités que nous avons signalées au paragraphe 8. Cela revient à dire que l'inégalité de Schwarz n'est pas nécessairement satisfaite, et qu'on ne peut rien dire *a priori* sur l'ordre de grandeur comparé des quantités $\left(\frac{\partial^2 \log a}{\partial x_k \partial x_l} \right)^2$ et $\frac{\partial^2 \log a}{\partial x_k^2} \frac{\partial^2 \log a}{\partial x_l^2}$.

La cause initiale de cette différence entre le fluide de probabilité et un gaz se trouve dans le fait que le carré d'une variable aléatoire est positif, alors que le carré d'un opérateur ne donne pas nécessairement un résultat positif.

La vitesse dérivant du potentiel b , le fluide est irrotationnel. Or les forces de tension de volume dérivent aussi d'un potentiel. Ces forces ont en effet pour composantes :

$$\frac{1}{\rho} \sum_l \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l},$$

et un calcul simple montre que :

$$\frac{1}{\rho} \sum_l \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\Delta a}{a}.$$

Cette propriété des tensions rapproche le fluide de probabilité d'un fluide irrotationnel classique non visqueux, c'est-à-dire soumis à une simple pression normale (fluide parfait).

Les équations du mouvement du fluide de probabilité peuvent s'écrire :

$$(72) \quad \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial t} + \sum_l \overline{u_l} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_l} = -\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \sum_l \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial b}{\partial x_l} \right)^2 + V \right] = \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\Delta a}{a}.$$

Elles se résument en l'unique équation :

$$(73) \quad \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial b}{\partial x_l} \right)^2 + V - \frac{h^2}{2} \frac{\Delta a}{a} = 0,$$

à laquelle il faut associer l'équation de continuité :

$$(74) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial b}{\partial x_l} (\rho \overline{u_l}) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(75) \quad \frac{\partial a}{\partial t} + \sum \frac{\partial a}{\partial x_l} \frac{\partial b}{\partial x_l} + \frac{1}{2} a \Delta b = 0.$$

De même les équations d'un fluide parfait irrotationnel s'écrivent :

$$(76) \quad \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial t} + \sum_l \overline{u_l} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_l} = -\frac{\partial V}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k}, \quad \overline{u_k} = \frac{\partial b}{\partial x_k},$$

et les forces de tension dérivent, là aussi, d'un potentiel $W = - \int \frac{dp}{\rho}$. Ces équations se résument en :

$$(77) \quad \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial b}{\partial x_l} \right)^2 + V - W = 0.$$

Si, dans le premier cas, $h \rightarrow 0$, et si, dans le second cas $p \rightarrow 0$, les équations (73) et (77) se réduisent toutes deux à l'équation :

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial b}{\partial x_l} \right)^2 + V = 0,$$

qui n'est autre que l'équation de Jacobi de la mécanique rationnelle. Cette équation englobe les trajectoires de tous les points matériels soumis au potentiel V et ne

présentant entre eux aucune interaction. Convenablement groupées, ces trajectoires constituent un milieu continu, un véritable fluide limite, mais l'absence d'interaction lui donne une physionomie particulière. C'est un fluide *sans tensions*. Et en effet, dire que h ou p tendent vers 0, c'est dire que les tensions du fluide de probabilité ou la pression du fluide parfait disparaissent.

Il est facile de vérifier que l'ensemble des équations réelles (73) et (75) est équivalent à l'équation de Schrödinger. Mais, bien entendu, le fluide de probabilité n'est pas une représentation intégrale du corpuscule quantique, pas plus que les équations hydrodynamiques déduites de la théorie du transfert ne représentent toutes les propriétés du point aléatoire. C'est une *image moyenne*, beaucoup plus détaillée que celle qui consisterait à se borner au mouvement moyen du centre de gravité (théorèmes d'Ehrenfest en mécanique quantique), mais cependant très limitée encore, dont l'interprétation physique ne semble pas très nette, et à laquelle il serait tout à fait incorrect de ramener la description du corpuscule quantique.

45. — Extension des principes statistiques. Notions sur les mélanges [43-45-51-52].

Dans tout ce qui précède, nous avons étudié des systèmes qui se trouvaient dans un état bien défini, c'est-à-dire pour lesquels la fonction d'onde ψ était une donnée précise. La mécanique quantique examine aussi le cas où la fonction d'onde ψ elle-même est soumise à une incertitude. La manière la plus simple de se les représenter est d'imaginer, dans un champ de forces donné, un ensemble de corpuscules ayant des fonctions d'ondes $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ données, la probabilité (statistique) d'une fonction ψ_k étant un certain nombre w_k donné, positif, et tel que $\sum_k w_k = 1$. Si tous les w_k sont

nuls, sauf un seul, qui est égal à 1, un seul état est possible, et l'on dit qu'on a affaire à un *cas pur*. Dans le cas général, on a un *mélange* de cas purs.

Les moyennes des grandeurs dans les cas purs constituants peuvent être considérées comme des *moyennes liées* relatives aux valeurs fixées de l'indice k , dont la probabilité absolue est w_k . D'après le théorème des probabilités composées, la valeur moyenne de la grandeur attachée à l'opérateur C est :

$$\bar{C} = \sum_k w_k (C \psi_k, \psi_k) = \sum_k w_k \int \dot{\psi}_k^* C \psi_k dx.$$

On peut intégrer cette série terme à terme, tout au moins si l'opérateur C est borné, et écrire :

$$\bar{C} = \int \sum_k w_k \dot{\psi}_k^* C \psi_k dx.$$

Considérons alors la fonction :

$$S(x, x') = \sum_k w_k \dot{\psi}_k(x) \dot{\psi}_k^*(x').$$

Nous pouvons écrire :

$$(78) \quad \bar{C} = \int \lim_{x'=x} C S(x, x') dx.$$

On démontre que l'on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les états composants ψ_k sont deux à deux orthogonaux. Considérons alors $S(x, x')$ comme le *noyau d'un opérateur* intégral S , qui fasse passer d'une fonction $\psi(x)$ à une fonction $\psi_1(x)$ par la formule :

$$\psi_1(x) = S \psi(x) = \int \psi(x') S(x, x') dx'.$$

(Il est bien entendu que $S(x, x')$ veut dire $S(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)$ et qu'on intègre dans tout l'espace des $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$.)

Il est facile de vérifier que les probabilités w_k sont les valeurs propres de l'opérateur S , et que les états composants $\psi_k(x)$ sont les fonctions propres normées correspondantes.

L'opérateur S s'appelle l'*opérateur statistique*. Il jouit des propriétés suivantes :

1° Si $C = 1$:

$$\int S(x, x) dx = 1.$$

Cette propriété exprime que $\sum_k w_k = 1$.

2° Les valeurs propres de S sont réelles et positives, car ce sont les probabilités w_k .

3° Quel que soit le vecteur ψ , le produit scalaire :

$$(S\psi, \psi) = \int \psi^*(x) S(x, x') \psi(x') dx dx',$$

est non négatif. Il est en effet égal à :

$$\sum w_k \left| \int \psi_k \psi_k^* dx \right|^2.$$

4° Désignons par P_{ψ_k} l'opérateur de projection sur la direction ψ_k de l'espace de Hilbert. On a :

$$S = \sum w_k P_{\psi_k}.$$

Par suite :

$$S^2 = \sum w_k w_l P_{\psi_k} P_{\psi_l}.$$

Mais $P_{\psi_k} P_{\psi_l} = 0$, si $k \neq l$, parce que ψ_k et ψ_l sont orthogonaux, et $P_{\psi_k} P_{\psi_k} = P_{\psi_k}$.

Donc :

$$S^2 = \sum_k w_k^2 P_{\psi_k}.$$

Ce résultat exprime simplement que l'opérateur S^2 a les mêmes axes propres que l'opérateur S , et pour valeurs propres les carrés des valeurs propres de S . Formons alors :

$$S - S^2 = \sum w_k (1 - w_k) P_{\psi_k}.$$

Quel que soit le vecteur ψ , le produit scalaire :

$$[(S - S^2) \psi, \psi] = \sum w_k (1 - w_k) (P_{\psi_k} \psi, \psi) = \sum w_k (1 - w_k) \|P_{\psi_k} \psi\|^2,$$

est non négatif. L'opérateur $S - S^2$ possède la même propriété que l'opérateur S . Ce produit scalaire est nul si tous les w_k sont nuls, sauf un seul, qui est égal à 1. Il est donc nul dans un cas pur, et dans ce cas seulement, et alors $S = S^2$. *Dans un cas pur, l'opérateur S est un opérateur de projection.*

Nous généraliserons la définition d'un mélange de la façon suivante :

Soit S un opérateur intégral ayant pour noyau $S(x, x')$. Ne faisons plus aucune hypothèse *a priori* sur la possibilité de résoudre le problème des valeurs propres. Nous dirons que S définit un mélange si :

1° S est un opérateur self adjoint, tel que, pour tout vecteur ψ de l'espace de Hilbert,

$$(S\psi, \psi) \geq 0, \quad \int S(x, x) dx = 1.$$

2° La moyenne de la grandeur aléatoire C attachée à l'opérateur C se calcule par la formule :

$$\bar{C} = \int \lim_{x' \rightarrow x} CS(x, x') dx.$$

Si $S = S^2$, le mélange se réduit à un cas pur, par définition. S est alors un projecteur.

Si le spectre de S est discret, et que, pour fixer les idées, les valeurs propres sont simples, on vérifie qu'on retrouve les propriétés initiales de l'opérateur statistique. Appelons en effet w_k les valeurs propres de S , $\psi_k(x)$ les fonctions propres. On a d'abord :

$$S(x, x') = \sum w_k \psi_k(x) \psi_k^*(x'),$$

ψ_k étant normé, la condition $\int S(x, x) dx = 1$ exprime que $\sum w_k = 1$.

La condition $(S\psi, \psi) \geq 0$, s'écrit, en prenant successivement pour ψ tous les ψ_k , et en notant que les w_k sont réels,

$$w_k \geq 0.$$

Comme $\sum w_k = 1$, on en déduit que $w_k \leq 1$, et par suite que $w_k(1 - w_k) \geq 0$. Cette dernière inégalité exprime que $[(S - S^2)\psi, \psi] \geq 0$.

Exceptionnellement, l'un des w_k peut être égal à 1. Tous les autres sont alors nuls, et $S(x, x')$ se réduit au produit $\psi_k(x) \psi_k^*(x')$. On démontre que, quelle que soit la forme de l'opérateur statistique S , la condition $S = S^2$ entraîne la décomposition du noyau en un produit de la forme $\psi_k(x) \psi_k^*(x')$.

Remarque 1. — Reprenons la forme :

$$S(x, x') = \sum w_k \psi_k(x) \psi_k^*(x'),$$

du noyau de l'opérateur statistique. Et, à titre exceptionnel, introduisons le symbolisme *matriciel* dans l'espace de Hilbert, au lieu du symbolisme des *opérateurs* [17]. Choisissons une base orthonormale complète de fonctions $\xi_1(x), \xi_2(x), \dots$

A l'opérateur C , nous faisons correspondre la matrice qui a pour éléments :

$$c_{kl} = (C \xi_k, \xi_l),$$

et à l'opérateur S la matrice qui a pour éléments :

$$s_{kl} = (S \xi_k, \xi_l) = \int \xi_l^*(x) S \xi_k(x) dx = \int \xi_l^*(x) S(x, x') \xi_k(x') dx dx'.$$

Nous pouvons, d'autre part, développer $\psi_k(x)$ suivant les ξ_k :

$$\psi_k(x) = \sum_p \psi_{kp} \xi_p(x), \quad \psi_{kp} = (\psi_k, \xi_p) = \int \xi_p^* \psi_k dx.$$

Transformons l'expression de s_{kl} :

$$s_{kl} = \sum_j w_j \int \xi_l^*(x) \psi_j(x) \psi_j^*(x') \xi_k(x') dx dx' = \sum_j w_j (\psi_j, \xi_l) (\psi_j, \xi_k)^* = \sum_j w_j \psi_{jl} \psi_{jk}^*.$$

Or l'expression de la valeur moyenne est :

$$\bar{C} = \sum_k w_k (C \psi_k, \psi_k) = \sum_{jkl} w_j \psi_{jl} \psi_{jk}^* (C \xi_l, \xi_k) = \sum_{kl} c_{lk} \sum_j w_j \psi_{jl} \psi_{jk}^*,$$

ou :

$$\bar{C} = \sum_{kl} c_{lk} s_{kl}.$$

D'après la règle du produit de deux matrices, on reconnaît que $\bar{C}$ est la *trace* (somme des termes diagonaux) du produit des deux matrices S et C , l'ordre des facteurs étant indifférent. C'est sous cette forme qu'on énonce souvent le résultat.

La formule :

$$\bar{C} = \int \lim_{x'=x} CS(x, x') dx$$

est la généralisation fonctionnelle de la notion de trace.

Dans un cas pur, la matrice s_{kl} se réduit au produit général du vecteur ψ par lui-même : s_{kl} est le produit de la composante de rang k de $\psi^\star$ par la composante de rang l de ψ .

On pourrait simplifier le raisonnement en prenant comme base ξ_k les vecteurs propres ψ_k de S . La matrice S serait alors diagonale et la formule $\bar{C} = \sum w_l c_{ll}$ exprimerait bien la trace du produit des matrices S et C .

Remarque 2. — La correspondance entre le formalisme de la théorie des mélanges et celui des cas purs apparaît d'une façon plus nette encore si l'on essaie d'étendre la formule (52) du paragraphe 37 aux mélanges. Pour un cas pur, on a vu que :

$$\bar{C} = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int \psi^\star(x) \psi_1(x') C_x e^{-\frac{i}{h} \sum x_k x'_k} dx dx',$$

ψ_1 étant transformé de Fourier de ψ . Introduisons de même la transformée de Fourier de $S(x, x')$ par rapport à x , en posant :

$$S(x, x') = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{i}{h} \sum x_k y_k} S_1(y, x') dy.$$

La formule de la valeur moyenne s'écrit :

$$\bar{C} = \int \lim_{x'=x} S(x, x') dx = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int \lim_{x'=x} C_x S_1(y, x') e^{-\frac{i}{h} \sum x_k y_k} dx dy,$$

ou :

$$\bar{C} = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int \lim_{x'=x} S_1(y, x') C_x e^{-\frac{i}{h} \sum x_k y_k} dx dy.$$

L'opération de passage à la limite est immédiate, et, en changeant légèrement les notations, on trouve :

$$(79) \quad \bar{C} = (2\pi h)^{-\frac{n}{2}} \int S_1(x', x) C_x e^{-\frac{i}{h} \sum x_k x'_k} dx dx',$$

formule qui contient bien la formule (52) comme cas particulier, et dans laquelle les rôles de l'« état » (noyau S_1) et de la grandeur physique étudiée (opérateur C) sont dissociés.

46. — Lois de probabilité dans un mélange [12-49].

Cherchons la pseudo-fonction caractéristique, au sens de Wigner, attachée au système position-impulsion, c'est-à-dire à l'opérateur $e^{i \sum a_k x_k - h \sum \frac{\partial}{\partial x_k}}$.

Elle a pour expression, d'après les résultats du chapitre IV,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha, \beta) &= \int \lim_{x'=x} e^{i \sum \alpha_k x_k - h \sum \beta_k \frac{\partial}{\partial x_k}} S(x, x') dx, \\ &= \int \lim_{x'=x} e^{i \sum \alpha_k \left(x_k - \frac{h}{2} \beta_k\right)} S\left(x - h \beta, x'\right) dx, \\ &= \int e^{i \sum \alpha_k \left(x_k - \frac{h}{2} \beta_k\right)} S\left(x - h \beta, x\right) dx,\end{aligned}$$

ou finalement :

$$(80) \quad \varphi(\alpha, \beta) = \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} S\left(\xi - \frac{h}{2} \beta, \xi + \frac{h}{2} \beta\right) d\xi.$$

Il lui correspond une pseudo-densité de probabilité :

$$(81) \quad f(x, u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i \sum \beta_k u_k} S\left(x - \frac{h}{2} \beta, x + \frac{h}{2} \beta\right) d\beta.$$

La fonction f n'est pas une vraie densité de probabilité car elle n'est pas nécessairement positive. Mais si, parmi les $2n$ variables $X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_n$, on en prend n ayant des indices différents, le théorème des probabilités totales permet de déduire de f les densités de probabilité correctes de ces familles de n variables aléatoires.

Par exemple, la position a pour fonction caractéristique :

$$\int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} S(\xi, \xi) d\xi,$$

et pour densité de probabilité $S(x, x)$. On sait que cette fonction est normée. Pour montrer qu'elle est positive, il suffit, en supposant naturellement la fonction S continue par rapport à l'ensemble des variables qui y figurent, d'appliquer l'inégalité :

$$(S\psi, \psi) = \int \psi^*(x) S(x, x') \psi(x') dx dx' \geq 0,$$

à la fonction $\psi(x)$ qui est nulle si x est en dehors de l'intervalle $\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon$ et qui est égale à la constante $(2\varepsilon)^{-\frac{n}{2}}$ dans le cube de centre ξ et d'arêtes parallèles aux axes et de longueur 2ε . Cette fonction est bien de carré normé, et l'on a dans ce cube :

$$(2\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} \int S(x, x') dx dx' \geq 0,$$

c'est-à-dire :

$$\int S(x, x') dx dx' \geq 0.$$

Si ε est infiniment petit, S , étant continue, diffère infiniment peu de $S(\xi, \xi)$, et l'intégrale :

$$\int S(\xi, \xi) dx dx' = (2\varepsilon)^{2n} S(\xi, \xi),$$

est positive, donc aussi $S(\xi, \xi)$.

Bien entendu, si S peut se mettre sous la forme :

$$S(x, x') = \sum w_k \psi_k(x) \psi_k^*(x'),$$

le résultat est évident.

La densité de probabilité du vecteur impulsion est de même :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i \sum \beta_k u_k} S\left(\xi - \frac{h}{2} \beta, \xi + \frac{h}{2} \beta\right) d\xi d\beta.$$

On peut la transformer par le changement de variables :

$$\xi_k - \frac{h}{2} \beta_k = \lambda_k, \quad \xi_k + \frac{h}{2} \beta_k = \mu_k.$$

On trouve ainsi :

$$\frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{-\frac{i}{h} \sum (\mu_k - \lambda_k) u_k} S(\lambda, \mu) d\lambda d\mu.$$

Lorsque $S(\lambda, \mu) = \sum w_k \psi_k(\lambda) \psi_k^*(\mu)$, on vérifie immédiatement que cette grandeur est positive et normée. Dans le cas général, il suffit de montrer que le noyau :

$$\Sigma(x, x') = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{\frac{i}{h} \sum (\lambda_k x_k - \mu_k x'_k)} S(\lambda, \mu) d\lambda d\mu,$$

possède les mêmes propriétés que le noyau S . Vérifions par exemple que :

$$(\Sigma \psi, \psi) \geq 0.$$

On voit d'abord que :

$$(\Sigma \psi, \psi) = \int \psi^*(x) \psi(x') e^{\frac{i}{h} \sum (\lambda_k x_k - \mu_k x'_k)} S(\lambda, \mu) d\lambda d\mu dx dx'.$$

Si l'on pose :

$$\psi_1(\mu) = \int \psi(x') e^{-\frac{i}{h} \sum \mu_k x'_k} dx',$$

on voit alors que :

$$(\Sigma \psi, \psi) = \int \psi_1^*(\lambda) \psi_1(\mu) S(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = (S \psi_1, \psi_1) \geq 0.$$

$(\Sigma \psi, \psi)$ est égal à $(S \psi_1, \psi_1)$, ψ_1 étant transformée de Fourier de ψ .

Des résultats analogues apparaissent pour les autres vraies lois de probabilités que l'on peut déduire de la pseudo-fonction caractéristique φ .

47. — **Équation d'évolution de la fonction $S(x, y, t)$ et de la fonction caractéristique $\varphi(\alpha, \beta, t)$. Théorie du transfert [12].**

Nous partons de l'hypothèse que φ satisfait à une équation d'évolution de la forme :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} = B \varphi,$$

B étant un opérateur du type étudié au paragraphe 5. Nous voulons expliciter l'opérateur B et en déduire l'équation d'évolution de S. Partons de la formule

$$\varphi(\alpha, \beta, t) = \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} S\left(\xi - \frac{h}{2} \beta, \xi + \frac{h}{2} \beta, t\right) d\xi,$$

et calculons $\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \frac{\partial S}{\partial t} d\xi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} = \frac{h}{2} \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \left[\frac{\partial S}{\partial y_k} - \frac{\partial S}{\partial x_k} \right] d\xi,$$

étant entendu que la notation S signifie $S\left(\xi - \frac{h}{2} \beta, \xi + \frac{h}{2} \beta, t\right)$ et que $\frac{\partial S}{\partial x_k}$, par exemple s'obtient en dérivant S(x, y, t) par rapport à x_k , et en remplaçant dans le résultat x_k par $\xi_k - \frac{h}{2} \beta_k$ et y_k par $\xi_k + \frac{h}{2} \beta_k$.

Pour former $\alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k}$, on remarque que

$$\alpha_k e^{i \sum \alpha_k \xi_k} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_k} e^{i \sum \alpha_k \xi_k}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} &= \frac{h}{2i} \int \left(\frac{\partial S}{\partial y_k} - \frac{\partial S}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_k} e^{i \sum \alpha_k \xi_k} d\xi, \\ &= \frac{h}{2i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial y_k} - \frac{\partial S}{\partial x_k} \right) e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \right] - \frac{h}{2i} \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y_k^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial x_k^2} \right) d\xi. \end{aligned}$$

S doit s'annuler assez vite à l'infini pour que le crochet disparaisse. On trouve alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} = \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} \left[\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{h}{2i} \left(\sum \frac{\partial^2 S}{\partial y_k^2} - \sum \frac{\partial^2 S}{\partial x_k^2} \right) \right] d\xi.$$

Comme dans le cas pur, le second nombre ne peut prendre la forme $B \varphi$ que si :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{h}{2i} \left(\sum \frac{\partial^2 S}{\partial y_k^2} - \sum \frac{\partial^2 S}{\partial x_k^2} \right) = a(x, y, t) S,$$

a étant une certaine fonction des x_k, y_k, t , et S désignant dans cette formule $S(x, y, t)$.

On a alors :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum \alpha_k \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_k} = \int e^{i \sum \alpha_k \xi_k} a \left(\xi - \frac{h}{2} \beta, \xi + \frac{h}{2} \beta, t \right) S \left(\xi - \frac{h}{2} \beta, \xi + \frac{h}{2} \beta, t \right) d\xi.$$

On en déduit par une méthode déjà employée que :

$$(82) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum \alpha_k \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_k} = a \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{h}{2} \beta, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{h}{2} \beta, t \right) \Phi.$$

L'opérateur B s'écrit ici :

$$B = a \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{h}{2} \beta, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{h}{2} \beta, t \right).$$

Il en résulte, comme un calcul direct pouvait le montrer, que la densité f vérifie une équation de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum u_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = A' f,$$

A' étant l'opérateur adjoint de :

$$(83) \quad A = a \left(x - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, x + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right).$$

Les u_k ne figurant pas dans A , on a :

$$A' = a \left(x + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, x - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right).$$

L'équation générale de transfert s'écrit ici, comme toujours,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \overline{G} + \sum \frac{\partial}{\partial x_k} \rho \overline{Gu_k} = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum u_k \frac{\partial}{\partial x_k} + A \right) G},$$

avec :

$$\rho = S(x, t).$$

Pour qu'elle contienne une équation de continuité, il faut que $\overline{A(1)} = 0$. Pour qu'elle contienne des équations de transfert, il faut plus généralement que A satisfasse aux conditions du paragraphe 7. Il suffit pour cela que l'on ait identiquement :

$$a(x, x, t) = 0.$$

Le *fluide associé* au corpuscule quantique défini par un mélange est soumis à un champ de forces ayant pour densité $\overline{Au_k}$. Nous devons donc poser :

$$\overline{Au_k} = -\frac{\partial V}{\partial x_k},$$

$V(x, t)$ étant le potentiel des forces extérieures.

Si l'on veut que l'équation d'évolution de S contienne, lorsque le mélange se réduit à un cas pur, l'équation de Schrödinger, on doit restreindre la forme de la fonction a . Supposons, en effet, que :

$$S(x, y, t) = \psi(x, t) \psi^*(y, t).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & \psi(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(y, t) + \psi^*(y, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \\ & + \frac{h}{2i} \psi(x, t) \sum \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} \psi^*(y, t) - \frac{h}{2i} \psi^*(y, t) \sum \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \psi(x, t) = a(x, y, t) \psi(x, t) \psi^*(y, t) \end{aligned}$$

Donnons aux y_k des valeurs quelconques fixées. Il reste une équation où les variables indépendantes sont x_k, t , équation que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{h}{2i} \Delta \psi = b(x, t) \psi.$$

Mais alors :

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{h}{2i} \Delta \psi^* = b^*(x, t) \psi^*,$$

et, par comparaison,

$$a(x, y, t) = b(x, t) + b^*(y, t).$$

La fonction a est nécessairement la somme d'une fonction de x_k, t et d'une fonction de y_k, t . La forme de la fonction b se déduit enfin de la théorie du transfert, par l'intermédiaire de la relation :

$$\overline{Au_k} = -\frac{\partial V}{\partial x_k},$$

et des propriétés de l'opérateur A . On a maintenant :

$$A = b \left(x - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right) + b^* \left(x + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right).$$

La condition $\overline{A(1)} = 0$ montre que :

$$b(x, t) + b^*(x, t) = 0,$$

c'est-à-dire que b est imaginaire pur. D'autre part,

$$Au_k = \frac{h}{2i} \left(\frac{\partial b^*}{\partial x_k} - \frac{\partial b}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_k}.$$

b étant imaginaire pur, on est conduit à poser :

$$b(x, t) = \frac{i}{h} V(x, t),$$

et :

$$(83) \quad a(x, y, t) = \frac{i}{h} [V(x, t) - V(y, t)].$$

L'étude du fluide de probabilité ne présente alors plus de difficulté. Sa vitesse et ses tensions se déduisent du développement de la pseudo-fonction caractéristique relative à la pseudo-loi de probabilité liée de la vitesse pour une position donnée, qui a pour expression :

$$\frac{S\left(x - \frac{h}{2}\beta, x + \frac{h}{2}\beta, t\right)}{S(x, x, t)}.$$

Si $S(x, y, t) = \sum w_k \psi_k(x, t) \psi_k^*(y, t)$, il est plus rapide de remarquer que les moyennes (liées en x) dans le mélange s'obtiennent, par l'intermédiaire du théorème des probabilités composées, à partir des moyennes relatives à chaque constituant pur. Si l'on pose :

$$\psi_k(x, t) = a_k(x, t) e^{-\frac{i}{h} b_k(x, t)},$$

la moyenne, liée pour une valeur de k et pour les x_i , de la vitesse, a pour expression $\frac{\partial b_k}{\partial x_i}$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Désignons schématiquement par $P(x, u, k)$ la probabilité d'une valeur de x , d'une valeur de u et d'une valeur de k . Nous pouvons écrire :

$$P(x, u, k) = P(k) P(x|k) P(u|x, k),$$

$P(u|x, k)$ désignant la probabilité liée de u pour des valeurs choisies de x, k , et $P(x|k)$ la probabilité liée de x pour une valeur choisie de k .

On sait que la moyenne liée de u_i pour x, k données est égale à :

$$\frac{\partial b_k}{\partial x_i} = \sum_u u_i P(u|x, k),$$

et l'on cherche la moyenne liée :

$$\overline{u_i} = \sum_u u_i P(u|x).$$

On voit que :

$$\begin{aligned} \overline{u_i} &= \frac{1}{P(x)} \sum_u u_i P(x, u) = \frac{1}{P(x)} \sum_{u, k} u_i P(x, u, k) = \frac{\sum_{u, k} u_i P(k) P(x|k) P(u|x, k)}{\sum_k P(x, k)} \\ &= \frac{\sum_k P(k) P(x|k) \sum_u u_i P(u|x, k)}{\sum_k P(x, k)} = \frac{\sum_k P(k) P(x|k) \frac{\partial b_k}{\partial x_i}}{\sum_k P(k) P(x|k)}. \end{aligned}$$

Or $P(k) = w_k$, et $P(x|k)$ est une densité de probabilité égale à $|\psi_k|^2 = a_k^2$.
Par conséquent :

$$\overline{u_i} = \frac{\sum_k w_k a_k^2 \frac{\partial b_k}{\partial x_i}}{\sum_k w_k a_k^2}.$$

On remarque que, en général, le fluide de probabilité *n'est pas irrotationnel*. Il l'est dans les cas purs, comme nous l'avons remarqué au paragraphe 44, et seulement dans ces cas.

Remarque. — D'après la formule (80), il y a réciprocity entre la pseudo-fonction caractéristique φ (ou la pseudo-densité f) et le *noyau statistique* S . A une fonction φ (au sens de Wigner) correspond donc, en général, un *mélange* et non un cas pur. Le cas pur est exceptionnel. Moyennant la condition (83), l'équation d'évolution (82) de φ dans un mélange est la même que l'équation (64) que nous avons démontrée dans un cas pur. Les solutions de cette équation définissent en général un mélange, et l'on ne peut leur associer une *fonction d'onde* ψ .

48. — Remarques sur l'hydrodynamique quantique [21].

Si $\hbar$ peut être considéré comme négligeable, l'équation d'évolution *quantique* :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum u_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{i\hbar} \left[V \left(x - \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right) - V \left(x + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial u}, t \right) \right] f$$

se réduit à l'équation de Liouville (ou équation des fonctions aléatoires doublement dérivables) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial u_k},$$

de la mécanique classique (statistique ou aléatoire).

En supposant que le corpuscule quantique à $3n$ dimensions soit un système physique de n corpuscules à 3 dimensions, on peut généraliser à l'équation d'évolution quantique les remarques du paragraphe 10 qui s'appliquaient à l'équation de Liouville. Les circonstances les plus simples et les plus usuelles sont celles où les corpuscules constituants sont tous identiques et où le potentiel V se réduit à des termes d'action extérieure $V(x_\alpha)$, le terme V ne dépendant que des coordonnées du corpuscule de rang α (et éventuellement du temps), et à des termes d'interaction $\Phi(x_\alpha, x_\beta)$:

$$V = \sum_{\alpha=1}^n V(x_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \Phi(x_\alpha, x_\beta),$$

le facteur $\frac{1}{2}$ tenait compte de la symétrie des potentiels d'interaction relativement aux deux indices α et β , et x_α représentant l'ensemble des trois coordonnées du corpuscule de rang α .

On a donc ici :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum u_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = A' f,$$

avec :

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{ih} \sum_{\alpha=1}^n \left[V \left(x_{\alpha} - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}} \right) - V \left(x_{\alpha} + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{ih} \sum_{\alpha \neq \beta} \left[\Phi \left(x_{\alpha} - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}}, x_{\beta} - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_{\beta}} \right) - \Phi \left(x_{\alpha} + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}}, x_{\beta} + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_{\beta}} \right) \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \left(\frac{h}{2} \right)^{2p} \frac{\partial^{2p+1}}{\partial x_{\alpha}^{2p+1}} V(x_{\alpha}) \frac{\partial^{2p+1}}{\partial u_{\alpha}^{2p+1}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha \neq \beta \\ p, q}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{p! q!} \left(\frac{h}{2} \right)^{2r} \frac{\partial^{p+q}}{\partial x_{\alpha}^p \partial x_{\beta}^q} \Phi(x_{\alpha}, x_{\beta}) \frac{\partial^{p+q}}{\partial u_{\alpha}^p \partial u_{\beta}^q}, \quad p+q = 2r+1. \end{aligned}$$

Multiplions $A' f$ par $dx_{s+1} du_{s+1} \dots dx_n du_n$, et intégrons.

Les termes simples donnent, si $\alpha \leq s$:

$$\sum_{\alpha=1}^s \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{h}{2} \right)^p \frac{\partial^{2p+1}}{\partial x_{\alpha}^{2p+1}} V(x_{\alpha}) \frac{\partial^{2p+1}}{\partial u_{\alpha}^{2p+1}} f_{12\dots s},$$

où $f_{12\dots s} = \int f dx_{s+1} \dots du_n$ est la pseudo-densité de probabilité relative aux s premiers corpuscules composants.

Les termes doubles se calculent de la façon suivante :

Si α et β sont pris dans la suite 1, ..., s , on trouve que :

$$\int \Phi(x_{\alpha}, x_{\beta}) \frac{\partial^{p+q}}{\partial u_{\alpha}^p \partial u_{\beta}^q} f dx_{s+1} \dots du_n = \Phi(x_{\alpha}, x_{\beta}) \frac{\partial^{p+q}}{\partial u_{\alpha}^p \partial u_{\beta}^q} f_{1\dots s}.$$

Si l'un des indices α ou β appartient à la suite $s+1, \dots, n$, on trouve 0, sauf si l'un des nombres p et q est nul.

Supposons que $q = 0$. On doit évaluer :

$$\int \frac{\partial^{2r+1}}{\partial x_{\alpha}^{2r+1}} \Phi(x_{\alpha}, x_{\beta}) \frac{\partial^{2r+1}}{\partial u_{\alpha}^{2r+1}} f dx_{s+1} \dots du_n.$$

Si donc $\beta > s$, $\alpha \leq s$, on a :

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial u_{\alpha}^{2r+1}} \int \frac{\partial^{2r+1}}{\partial x_{\alpha}^{2r+1}} \Phi(x_{\alpha}, x_{\beta}) f_{1\dots s\beta} dx_{\beta} du_{\beta}, \quad \beta > s.$$

On obtient de même un terme relatif au cas $p = 0$.

La forme intégrée de A' contient donc, d'une part, des termes de la forme initiale, mais réduits dans l'espace de configuration à $3s$ dimensions, et des termes résiduels que voici :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=s+1}^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{2r} \int \frac{\partial^{2r+1}}{\partial x_{\alpha}^{2r+1}} \Phi(x_{\alpha}, x_{\beta}) \frac{\partial^{2r+1}}{\partial u_{\alpha}^{2r+1}} f_{1\dots s\beta} dx_{\beta} du_{\beta} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=s+1}^n \sum_{\beta=1}^s \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^r \int \frac{\partial^{2r+1}}{\partial x_{\beta}^{2r+1}} \Phi(x_{\alpha}, x_{\beta}) \frac{\partial^{2r+1}}{\partial u_{\beta}^{2r+1}} f_{1\dots s\alpha} dx_{\alpha} du_{\alpha} \\ & = \frac{1}{2} \frac{1}{ih} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=s+1}^n \int dx_{\beta} du_{\beta} \left[\Phi\left(x_{\alpha} - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}}, x_{\beta}\right) - \Phi\left(x_{\alpha} + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}}, x_{\beta}\right) \right] f_{1\dots s\beta} \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{ih} \sum_{\beta=1}^s \sum_{\alpha=s+1}^n \int dx_{\alpha} du_{\alpha} \left[\Phi\left(x_{\alpha}, x_{\beta} - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_{\beta}}\right) - \Phi\left(x_{\alpha}, x_{\beta} + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_{\beta}}\right) \right] f_{1\dots s\alpha}. \end{aligned}$$

Les deux termes de cette somme sont d'ailleurs identiques, et se doublent, car le potentiel est symétrique par rapport à chaque couple.

Écrivons en particulier ces équations pour un seul corpuscule du système. $s = 1$:

$$\begin{aligned} (84) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{ih} \left[V\left(x_1 - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_1}\right) - V\left(x_1 + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_1}\right) \right] f_1 \\ &+ \frac{1}{ih} \sum_{\beta=1}^n \int dx_{\beta} du_{\beta} \left[\Phi\left(x_1 - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_1}, x_{\beta}\right) - \Phi\left(x_1 + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_1}, x_{\beta}\right) \right] f_{1\beta}. \end{aligned}$$

A cause de l'identité des molécules, les $n - 1$ termes de la dernière somme sont tous les mêmes. x_{β} , u_{β} jouent le rôle de variables d'intégration anonymes, se rapportant à une molécule arbitraire que l'on peut désigner uniformément par x_2 , u_2 . (84) s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} (85) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{ih} \left[V\left(x_1 - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_1}\right) - V\left(x_1 + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_1}\right) \right] f_1 \\ &+ \frac{n-1}{ih} \int dx_2 du_2 \left[\Phi\left(x_1 - \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_1}, x_2\right) - \Phi\left(x_1 + \frac{h}{2i} \frac{\partial}{\partial u_1}, x_2\right) \right] f_{12}, \end{aligned}$$

étant bien entendu que :

$$\int f_{12} dx_2 du_2 = f_1, \quad \int f_1 dx_1 du_1 = 1.$$

Ces équations constituent la base de l'hydrodynamique quantique. Elles permettent de traiter les problèmes de mécanique des liquides, même lorsque les molécules sont assez rapprochées pour que l'effet quantique se fasse sentir. Des équations équivalentes ont été établies, indépendamment des résultats de J. YVON sur la théorie

cinétique des gaz (1935), par BORN et GREEN (1946), qui les ont traitées de façon à en déduire des équations quantiques analogues à l'équation classique de Boltzmann. On voit qu'elles découlent directement de la théorie du transfert, telle qu'elle a été exposée dans les chapitres précédents.

De ces équations, on sait actuellement tirer en détails les propriétés des gaz (systèmes où les sous-ensembles permanents de molécules groupées sont pratiquement irréalisables) et des liquides (système où il existe des amas relativement persistants d'un petit nombre s de molécules). Seule la théorie de la turbulence n'a pas encore pu en être déduite.

INDEX DES PRINCIPALES NOTATIONS

A	opérateur linéaire de l'espace L^∞ .
A'	opérateur linéaire de l'espace L^1 .
C	opérateur linéaire de l'espace euclidien ou hilbertien.
c_{ij}	matrice.
$E(x)$	opérateur spectral.
$\mathcal{E}$	espace de Hilbert (ou ensemble donné, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre).
$f(x, u)$	densité de probabilité.
$G(x, u, t), g(u)$..	fonctions bornées.
$\overline{G}$	moyenne de G .
$\overline{G}$	moyenne liée dans certaines circonstances.
H	opérateur hamiltonien.
M_{kl}	composantes de l'opérateur moment cinétique.
M	point de l'espace euclidien.
P	opérateur de projection.
$p_1, p_2, \dots$	opérateur impulsion.
p	densité de probabilité de passage (exceptionnellement, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, p peut représenter une probabilité en général).
R	espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.
s	variable d'intégration.
S	opérateur statistique.
t	le temps.
T_{ij}	tenseur des tensions.
$u_1, u_2, \dots$	vitesse.
U	opérateur unitaire.
$U(t)$	vecteur vitesse aléatoire.
$x_1, x_2, \dots$	position.
$X(t)$	fonction aléatoire.

$\gamma_1, \gamma_2, \dots$	accélération.
$\Gamma(t_1, t_2)$	covariance d'une fonction aléatoire.
$\lambda_1, \lambda_2, \dots$	cosinus directeurs.
$\rho(x), \rho_1(u), \rho_n, \dots$	densités de probabilité.
τ	accroissement de temps.
$\varphi(\alpha), \varphi(\alpha, \beta)$	fonctions caractéristiques.
$\psi(x, t)$	fonction d'onde.
ω_{ij}	composantes de la variable aléatoire moment cinétique.
Ω	espace à n dimensions (espace de configuration).

Si ψ est un nombre complexe, ψ^* désigne le nombre complexe conjugué de ψ .

(M_1, M_2)	représente le produit scalaire des vecteurs M_1, M_2 .
$\ M\ $	représente la longueur du vecteur M .

Pour simplifier l'écriture, on emploie souvent les notations abrégées suivantes :

$f(x, u)$	représente $f(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n)$.
dx	représente $dx_1 dx_2 \dots dx_n$.
$\int f(x, u) dx du \dots$	représente $\int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n du_1 du_2 \dots du_n$.

Lorsque le domaine d'intégration est tout l'espace des variables d'intégration, il arrive fréquemment qu'on n'indique pas explicitement les limites d'intégration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARNOUS. — *Lois de probabilité en mécanique ondulatoire* (Thèse, 1946).
- [2] E. ARNOUS et D. MASSIGNON. — *Grandeurs observables et fonctions aléatoires* (C. R. Ac. Sc., 226-1948, p. 318).
- [3] E. ARNOUS, J. BASS et D. MASSIGNON. — *Sur les relations fonctionnelles vérifiées par les fonctions caractéristiques des fonctions aléatoires dérivables en moyenne quadratique* (C. R. Ac. Sc., 226, 1948, p. 627).
- [4] J. BASS. — *Les méthodes modernes du calcul des probabilités et leur application au problème de la turbulence* (Rapport technique n° 28 du groupement français pour le développement des recherches aéronautiques, 1946).
- [5] J. BASS. — *Les fonctions aléatoires et leur interprétation mécanique* (Revue scientifique, n° 3240, 1945).
- [6] J. BASS. — *Sur la structure des fonctions aléatoires* (C. R. Ac. Sc., 220, 1945, p. 190).
- [7] J. BASS. — *Quelques conséquences mécaniques de l'équation de structure d'un corpuscule aléatoire* (C. R. Ac. Sc., 220, 1945, p. 272).
- [8] J. BASS. — *Sur les rapports entre la mécanique ondulatoire et la théorie des fonctions aléatoires* (C. R. Ac. Sc., 221, 1945, p. 46).
- [9] J. BASS. — *Quelques remarques sur la signification du théorème des probabilités composées dans le formalisme de la mécanique quantique* (C. R. Ac. Sc., 222, 1946, p. 1372).
- [10] J. BASS. — *Sur le corpuscule aléatoire à masse aléatoire* (C. R. Ac. Sc., 225, 1947, p. 38).
- [11] J. BASS. — *Sur les propriétés des relations fonctionnelles vérifiées par les lois de probabilité des fonctions aléatoires dérivables* (C. R. Ac. Sc., 226, 1948, p. 1120).
- [12] J. BASS. — *Application aux mélanges de la théorie du transfert des grandeurs aléatoires* (C. R. Ac. Sc., 226, 1948, p. 1351).
- [13] J. BASS. — *Sur les moyennes et les lois de probabilité en mécanique ondulatoire* (C. R. Ac. Sc., 227, 1948, p. 112).
- [14] J. BASS et L. LE CAM. — *Sur certaines classes de fonctions aléatoires* (C. R. Ac. Sc., 227, 1948, p. 1206).
- [15] J. BASS, G. DEDEBANT et Ph. WEHRLE. — *Sur la connexion aléatoire d'un fluide* (C. R. Ac. Sc., 220, 1945, p. 165).
- [16] J. BASS, G. DEDEBANT et Ph. WEHRLE. — *Les équations différentielles aléatoires* (C. R. Ac. Sc., 221, 1945, p. 168).
- [17] E. BAUER et F. LONDON. — *La théorie de l'observation en mécanique quantique* (Act. Sc. et Ind., n° 775, Hermann, 1939).
- [18] L. BOLTZMANN. — *Leçons sur la théorie des gaz*, 1^{re} partie (Traduction Gallotti, Gauthier-Villars, 1902).
- [19] M. BORN et H. S. GREEN. — *A general kinetic theory of liquids. I. The molecular distribution functions* (Proc. Roy. Soc., A., 188, 1946, p. 10).

- [20] M. BORN et H. S. GREEN. — III. *Dynamical properties* (Proc. Roy. Soc., A., 190, 1947, p. 455).
- [21] M. BORN et H. S. GREEN. — IV. *Quantum mechanics of fluids* (Proc. Roy. Soc., A., 191, 1947, p. 168).
- [22] L. DE BROGLIE. — *Introduction à l'étude de la mécanique ondulatoire* (Hermann, 1930).
- [23] L. DE BROGLIE. — *Théorie de la quantification dans la nouvelle mécanique* (Hermann, 1932).
- [24] L. DE BROGLIE. — *La mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules* (Gauthier-Villars, 1939).
- [25] L. DE BROGLIE. — *Sur l'application du théorème des probabilités composées en mécanique ondulatoire* (C. R. Ac. Sc., 223, 1946, p. 874).
- [26] L. DE BROGLIE. — *Sur la statistique des cas purs en mécanique ondulatoire* (C. R. Ac. Sc., 226, 1948, p. 1056).
- [27] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET. — *Les fonctions aléatoires stationnaires de plusieurs variables* (Revue Scientifique, n° 3271, 1947).
- [28] R. COURANT et D. HILBERT. — *Methoden der mathematischen Physik*, t. I, 2^e édition (Springer, 1931).
- [29] G. DARMOIS. — *Statistique mathématique* (Doin, 1928).
- [30] G. DEDEBANT et Ph. WEHRLE. — *Mécanique aléatoire*, 1^{re} partie, *Le calcul aléatoire* (Portugaliae Physica, 1^{er} mars 1944).
- [31] G. DEDEBANT et Ph. WEHRLE. — *Mécanique aléatoire*, 2^e partie, *Applications physiques* (Portugaliae Physica, 1^{er} avril 1945).
- [32] G. DEDEBANT, J. MOYAL et Ph. WEHRLE. — *Sur les équations aux dérivées partielles que vérifient les fonctions de distribution d'un champ aléatoire* (C. R. Ac. Sc., 210, 1940, p. 243).
- [33] G. DEDEBANT et Ph. WEHRLE. — *Sur l'équivalent hydrodynamique d'un corpuscule aléatoire. Application à l'établissement des équations aux valeurs probables d'un fluide turbulent* (C. R. Ac. Sc., 210, 1940, p. 332).
- [34] M. DRESDEN. — *The hydrodynamical equations in quantum mechanics* (Phys. rev., 71, 1947, p. 143).
- [35] B. D'ESPAGNAT. — *Un procédé simple pour l'étude de certains problèmes d'évolution, avec application au cas d'une particule mobile en l'absence de champ* (C. R. Ac. Sc., 225, 1947, p. 1058).
- [36] M. FRÉCHET. — *Généralités sur les probabilités, variables aléatoires* (Gauthier-Villars, 1937).
- [37] H. S. GREEN. — *A general kinetic theory of liquids. II. Equilibrium properties* (Proc. Royal Soc., A., 189, 1947, p. 103).
- [38] G. JULIA. — *Introduction mathématique aux théories quantiques* (Gauthier-Villars, t. I, 1936; t. II, 1938).
- [39] A. KHINTCHINE. — *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Springer, 1933).
- [40] A. KOLMOGOROFF. — *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Math. Annalen, 1931).
- [41] P. LÉVY. — *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (Gauthier-Villars, 1937).
- [42] P. LÉVY. — *Processus stochastiques et mouvement brownien* (Gauthier-Villars, 1948).
- [43] M. LOEVE. — *Sur les fonctions aléatoires stationnaires de second ordre* (Revue Scientifique, n° 3245, 1945).

- [44] MADELUNG. — *Quantentheorie in hydrodynamischer Form.* (Z. Physik., 40, 1926, p. 322).
- [45] J. VON NEUMANN. — *Fondements mathématiques de la mécanique quantique* (Berlin, 1932. Traduction Proca. Presses universitaires de France, 1947).
- [46] W. PAULI. — *Handbuch der Physik.* (2^e édition, vol. XXIV, 1^{re} partie, 1933, p. 106).
- [47] J. PÉRÈS. — *Mécanique des fluides* (Gauthier-Villars, 1936).
- [48] H. VILLAT. — *Mécanique des fluides* (Gauthier-Villars, 1930).
- [49] E. WIGNER. — *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium* (Phys. Rev., 40, 1932, p. 749).
- [50] J. YVON. — *La théorie statistique des fluides et l'équation d'état* (Act. sc. et ind., n° 203, Hermann, 1935).
- [51] J. YVON. — *Sur une propriété commune aux opérateurs différentiels et intégraux* (C. R. Ac. Sc., 223, 1946, p. 311).
- [52] J. YVON. — *Sur les rapports entre la théorie des mélanges et la statistique classique* (C. R. Ac. Sc., 223, 1946, p. 347).
- [53] J. YVON. — *La notion quantique de mélange et ses applications* (Journal de physique, juin 1947, p. 182).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LA THÉORIE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE
(Heisenberg)

Vu et approuvé :

Paris, le 12 décembre 1948

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Jean CABANNES

Vu et permis d'imprimer :

Pour le Recteur de l'Académie de Paris,

*Le Vice-Président
du Conseil de l'Université de Paris,*

A. CHOLLEY



IMPRIMERIE